This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Digitized by Google

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

G. I. 's GRAVESANDE

MATHESEOS UNIVERSALIS ELEMENTA.

Quibus accedunt,

Specimen commentarii in Arithmeticam Univerſalem NEWTONI:

ut &

De determinanda Forma Seriei infinitæ adſumtæ REGULA NOVA.



LUGDUNI BATAVORUM,
Apud SAMUELEM LUCHTMANS,
M. DCC. XXVII.

Digitized by Google

Digitized by Google

PRÆFATIO.

INter varios Matheſeos uſus, merito cæteris anteponitur ille, quo ingenia reliquis omnibus ſcientiis aptiora reddit.

Fit hoc duplici modo 1°. Ratiociniis firmis mentem adſuefacit, quo hæc facultatem acquirit diſcernendi, in quo defectus ratiocinii hæreat, & quid in ipſo deſideretur. 2°. Matheſeos ſtudio ſagacitatem quandam acquirit mens, quæ in inquirendo Vero in ſcientiis reliquis, etiam in vita civili, magni uſus eſt; ſi modo aliarum ſcientiarum, aut ipſorum hominum, cognitio cum Matheſi conjungatur. Qui enim dum Matheſi animum applicat, reliqua negligit, non proprie methodum Mathematicam addiſcit, ſed ſolis ratiociniis circa quantitatem ingenium aptum facit.

Primus ex hiſce uſibus habetur in

Digitized by Google

Geometriæ ſtudio, ſi antiquorum methodum in demonſtrando ſequamur; non enim curandum utrum quis multa brevi tempore diſcat, ſed an pauca bene diſcat: ubi enim agitur de acquirenda facultate bene ratiocinandi, non agitur de numero propoſitionum, ſed tantum de methodo, qua traduntur, & ad hoc certe multi ex recentioribus Geometris non ſatis attendunt.

Uſus ſecundus memoratus, merito a multis ad Algebram refertur, quæ de Vero detegendo regulas & exempla tradit, quare hujus ſcientiæ ſtudium cum Geometriæ ſtudio conjungendum eſt.

Cui tamen utrique & Logices ſtudium addendum eſt, ſi quis ſibi artem ratiocinandi propriam facere in animo habet.

Si huic Algebræ uſui addamus hujus neceſſitatem, non tantum in omnibus Matheſeos partibus, ſed præcipue in Phyſicis, quam ſine

Geo-

Geometriæ & Algebræ Elementis nemo vix a limine ſalutare poteſt, in prædicanda hac arte ſubſiſtere poterimus.

Elementa, quæ nunc trado, privatis inſtitutionibus deſtinata ſunt; ideo quantum potui, quæ mihi dicenda fuere, breviter dixi.

Non in hiſce ago de Problematibus, quæ ultra duas dimenſiones adſcendunt. Scopuſque mihi fuit, quantum potui, illuſtrare naturam Problematum, quod plerumque negligunt de Algebra Scriptores, qui etiam non ſemper ſatis ex regulis generalioribus operationum rationes deducunt.

Hac de cauſa varias adjeci obſervationes circa Problematum ſolutiones, & de Problematibus, quæ ad duas conducunt dimenſiones, fuſius egi.

De Problematibus trium & quatuor Dimenſionum plura dicenda forent. De natura Æquationum plu-

Digitized by Google

rimi egere. Natura Problematum, quæ ad has æquationes conducunt, magis neglecta fuit: materia tamen Mathematico eſt digna & tirones ex multis difficultatibus liberarentur, ſi bene explicata foret.

De duobus ſcriptis minoribus, quæ hiſce elementis adjeci; vide ipſorum præfationes.

Digitized by Google

INDEX CAPITUM.

Cap. I. *Generalia de Quantitate, & Scopo Analytices.* pag. 1

II. *De Quantitatum Expreſſionibus, & Operationibus circa quantitates ſimplices.* 4

III. *De Operationibus circa Quantitates compoſitas.* 10

IV. *De Fractionibus.* 22

V. *De Quantitatibus ſurdis.* 38

VI. *De Proportionibus & Progreſſionibus.* 46

VII. *Generalia de Problematibus.* 54

VIII. *De Regulis quibus Problemata ſolvuntur.* 58

IX. *De Uſu Regularum in Problematibus unius Dimenſionis, &c.* 71

X. *De Natura & Solutione Æquationum duarum Dimenſionum.* 94

XI. *Problemata duarum Dimenſionum.* 107

XII. *De Problematibus indeterminatis.* 115

XIII. *Problemata indeterminata.* 120

XIV. *De Problematibus Geometricis,*

Digitized by Google

cis, & horum Conſtructione. 128
XV. *Problemata Geometrica.* 134
XVI. *De Problematibus Phyſicis.* 165
SPECIMEN COMMENTARII IN ARITHMETICAM UNIVERSALEM. 175
De Inventione Diviſorum. 177
De Extractione Radicis ex Binomio. 215
DE SERIEBUS INFINITIS. 238

Digitized by Google

MATHESEOS UNIVERSALIS ELEMENTA.

CAPUT I.

Generalia de Quantitate, & Scopo Analytices.

Matheſeos objectum generale eſt Quantitas.

1. *Quantum dicimus omne id, quod augeri & minui poteſt.* Ut Extenſio, Tempus, Motus, Velocitas, &c.

In diverſis Matheſeos partibus quantitates peculiares examinantur; de quantitate autem in genere conſiderata in his agam, regulaſque, quibus detegitur Verum, ubi de quantitatibus agitur, quæcunque hæ fuerint, breviter exponam.

Poſſunt quæ de Quantitate in genere de-

Digitized by Google

monſtrantur ad quantitatem quamcunque peculiarem applicari. Et Verum eâdem methodo, in partibus quibuſcunque Matheſeos aſſequimur.

2. *Omne ratiocinium de quantitate ad hujus menſuram referri poteſt.*

3. *Quantitatis Menſura eſt hujus cum alia ejuſdem generis collatio.* Linea dicitur ſex pedum, ſi, collata cum linea unius pedis, hanc ſexies contineat illa.

Quantitates ejuſdem generis tantum collationem admittunt; linea cum linea, ſuperficies cum ſuperficie, tempus cum tempore confertur: non autem tempus ullum lineæ cuicunque æquale dici poterit.

4. Dum quantitatem cum quantitate comparamus, ſæpe attendimus, ad exceſſum unius ſupra aliam, id eſt, videmus majorem valere minoris cum alia ſummam, quod & ad plures, repetita comparatione, applicare poſſumus. Ad hanc comparationem illam referimus Arithmeticæ operationem, quam ADDITIONEM vocamus.

5. Sæpe, mutatâ tantum conſideratione, ad defectum, quo quantitas ab alia quantitate deficit, attendimus. Determinatio autem differentiæ duarum quantitatum SUBTRACTIO vocatur.

6.

6. Quantitas quæ repetita additione ejuſdem quantitatis, aut partis ipſius formatur, MULTIPLICATIONE formari dicitur.

7. Contraria operatio, qua determinamus, quoties quantitas in quantitate contineatur, DIVISIO dicitur.

8. *Nulla poteſt concipi quantitatum collatio, quæ non ad unam ex his quatuor operationibus referri poſſit.* Quam enim vocant Radicis extractionem, hanc ad Diviſionem debere referri ſuo tempore dicetur.

9. Hiſce quatuor operationibus veritas omnis, quæ quantitates ſpectat, inveſtigatur.

Dicam nunc quid in his Elementis explicaturus ſum, & quo ordine.

Primo breviter exponam quomodo quantitas generaliter ita poſſit exprimi, ut expreſſio ad quantitatem quamcunque peculiarem poſſit applicari.

Deinde exponam methodum, qua operationes circa quantitates ita expreſſas inſtituantur.

Cum autem expreſſiones novæ ex his operationibus oriantur, demonſtrabo qua methodo circa has novas expreſſiones operandum ſit.

Tandem dicam qua arte, & quo ordine, in vero detegendo, operationes ipſæ

dirigendæ ſint.

10. Ars hæc, ALGEBRA, etiam ANALYSIS, à quibuſdam MATHESIS UNIVERSALIS vocatur.

Hujus artis, ut ex dictis patet, ſcopus eſt Problematum ſolutio.

11. *PROBLEMA vocant Mathematici Propoſitionem omnem, quæ aliquid faciendum exigit.*

Ut verò Problema ſolvatur, quod deſideratur præſtandum eſt; & demonſtrandum deinde ſolutionem requiſito ſatisfacere.

In ſolutionibus autem analyticis, ipſæ operationes, quibus ad illam pervenimus, extra dubium ponunt, veram eſſe, quæ detegitur ſolutio.

CAPUT II.

De Quantitatum Expreſſionibus & Operationibus circa Quantitates ſimplices.

12. QUantitates *Litteris exprimere maximè commodum* duxere Mathematici, ubi de operationibus agitur Algebraicis.

Singulas litteras *a*, *b*, *c*, &c. peculiarem

Digitized by Google

rem quantitatem quamcunque, ſive notam, ſive incognitam, exprimere poſſe quis non videt? Incognitaſque operationibus memoratis ſubjici iiſdem regulis, quæ in quantitatibus cognitis locum habent.

13. Ut autem facilius cognitæ quantitates ab incognitis diſtinguantur, has ultimis litteris z, y, x, u &c. denotant, dum primæ, ut a, b, c, &c. cognitis quantitatibus deſignandis inſerviunt.

DE ADDITIONE.

14. *Summa variarum quantitatum exprimitur, jungendo litteras, quæ ſingulas quantitates deſignant, ſigno hoc* $+$, *quod ſignificat PLUS.* Sic $a+b$ eſt a plus b, & valet ſummam quantitatum a & b.

EXEMPLA.

			$3d$
	a	d	$2d$
a	b	f	$2g$
a	a	g	g
$2a$	$2a+b$	$d+f+g$	$5d+3g$

DE SUBTRACTIONE.

15. *Signum hoc* — *indicat quantitatem ex alia tolli, ſignificat MINUS.* $a-b$, eſt a minus b, id eſt, exprimit hoc differentiam quantitatum a & b.

EXEMPLA.

$3a$	a	$3a$
$2a$	b	$2b$
a	$a-b$	$3a-2b$

DE MULTIPLICATIONE.

Multiplicatio eſt ejuſdem quantitatis, aut partis ipſius, repetitio (6.), ita ut vices quibus repetitur exprimendæ ſint; has autem numeri exprimunt.

16. *Omnis* ergo *Multiplicatio ſit per numerum. Et quantitatem per quantitatem multiplicare abſurdum eſt.*

17. Sed *Quantitas*, ſi cum alia conferatur, quæ pro unitate habetur, *poteſt* per numerum deſignari, & ipſa *pro numero haberi, quamvis per litteram exprimatur*, quod ſemper ſit, ubi quantitas per quantitatem mul-

Digitized by Google

multiplicatur, ne abſurda ſit Multiplicatio; neque ideò unitatis determinatio neceſſaria eſt.

18. *Multiplicationis ſignum eſt hoc* ×, *aut ſimplex litterarum conjunctio.* Ubi *a* multiplicari debet per *b*, ſcribimus *a* × *b* aut *a b*.

19. *Vocatur hoc PRODUCTUM Multiplicationis.*

20. Quod idem Productum poteſt exprimi per *b a*; nam *ad ordinem litterarum non attendimus in Multiplicatione.*

Si 3 *a* debeat multiplicari per *b*, Productum eſt 3 *a b*; ſed ſi 3 *a* multiplicandum ſit per 2 *b*, quis non videt præcedens Productum duplicari debere, & eſſe 6 *a b*. Ergo

21. *Ubi per numeros multiplicatæ ſunt quantitates, ſeparatim hi multiplicantur.*

22. Productum *a* per *a* eſt *a a*, quod etiam ſic exprimitur a^2;

Si *a a* aut a^2 per *a* multiplicetur Productum eſt *a a a* aut a^3.

23. Hac de cauſa *ubi quantitas per numerum multiplicatur*, ut omnis evitetur confuſio, *numerus ante litteram ſcribitur.* Si *b* per 6. multiplicetur, id eſt, ſi ſexies ſumi debeat, ſcribo 6 *b*, non *b* 6, ne expreſſio hæc confundatur cum b^6, quæ ſi-

Digitized by Google

gnificat *bbbbbb*.

24. Productum *a* per *a*, aut *aa*, vocatur QUADRATUM, aut SECUNDA POTESTAS, quantitatis *a*; & *a* eſt RADIX Quadrati *aa*.

25. CUBUS quantitatis *a* eſt a^3, aut *aaa*, dicitur etiam TERTIA POTESTAS; & *a* eſt Radix cubica a^3.

26. QUARTA POTESTAS quantitatis *a* eſt a^4, quæ etiam QUADRATO-QUADRATUM dicitiur. QUINTA POTESTAS eſt a^5 & ſic de cæteris.

27. *Numerus adſcriptus INDEX eſt Poteſtatis.*

28. *Quantitas, quæ per aliam multiplicari debet, vocatur MULTIPLICANDUM.*

29. *MULTIPLICATOR vocatur quantitas per quam Multiplicatio fit.*

30. *PRODUCTUM Multiplicationis vocatur quantitas, quæ Multiplicatione detegitur.*

EXEMPLA MULTIPLICATIONIS.

a	a^3	ab	$3b$	$3a^2f$
b	ab	ab	$6d$	$4af$
ab	a^4b	a^2b^2	$18bd$	$12a^3f^2$

DE DIVISIONE.

31. *Diviſio reſolvit quod Multiplicatione fu-*

Digitized by Google

fuit compoſitum, dum determinat quoties quantitas in quantitate contineatur.

32. *DIVIDENDUM vocatur quantitas quæ dividi debet.*

33. *DIVISOR eſt quantitas per quam fit diviſio.*

34. *QUOTIENS eſt quantitas quæ exprimit quoties Diviſor in Dividendo contineatur.*

35. *Diviſorem multiplicatum per Quotientem dare in Producto ipſum Dividendum*, ſatis manifeſtum eſt.

36. Unde hanc Regulam pro Diviſione detegimus. *Ex Dividendo Diviſor delendus eſt & ſupererit Quotiens:* ſi *ab* dividi debeat per *a*, deleto *a* reſtat *b*, & eſt Quotiens; nam multiplicato hoc Quotiente *b* per Diviſorem *a* datur in Producto ipſum Dividendum *ab*.

37. *Si numeri adſint hos ſeparatim debere dividi*, facile liquet (21. 35.)

EXEMPLA DIVISIONIS.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Divid.}\,ab\\ \text{Divis.}\;\;a\end{array}\right\}b\;\text{Quot.}\quad\left.\begin{array}{l}a^3bd\\ abd\end{array}\right\}aa.\quad\left.\begin{array}{l}6afg\\ 3ag\end{array}\right\}2f.$$

38. *Quando hac Methodo Diviſio inſtitui non poteſt*, ut ſi *ab* per *f* dividi debeat, *Di-*

Digitized by Google

videndum ſupra lineam & Diviſor infra eandem ſcribitur; ſic $\frac{ab}{f}$ exprimit hujus Diviſionis Quotientem.

39. *Quotiens in hoc ultimo caſu FRACTIO vocatur.*

40. *Dividendum,* (ut *ab*) *vocatur NUMERATOR Fractionis.*

41. *Diviſor* verò (ut *f*) *eſt DENOMINATOR Fractionis.*

CAPUT III.

De Operationibus circa Quantitates compoſitas.

42. Compoſita vocatur quantitas; ſi variæ ſimplices ſignis + aut — junguntur.

DE ADDITIONE.

43. Obſervandum quantitatem, quæ ſine ſigno ſcribitur, habere ſubintellectum ſignum +; & liquet *additionem fieri, ſi, ſervatis ſignis, quantitates addendæ jungantur.*

Ex-

Digitized by Google

EXEMPLA.

$a+b$	$2a-f$	$2a+g-d$
$d+f$	$a-l$	$3f-g-a$
		$b-g+d$
$a+b+d+f$	$3a-f-l$	$a+3f+b-g$

DE SUBTRACTIONE.

44. Subtractio eſt contrarium Additionis; ergo *ſubtrahenda quantitas, mutatis omnibus hujus ſignis, cum alia conjungenda eſt.*

EXEMPLA.

$a+b$	$2a+b$	$3a+f-2g$
$c+d$	$a-b$	$4a+g-d$
$a+b-c-d$	$a+2b$	$f-3g-a+d$

DE MULTIPLICATIONE.

45. *Singulas quantitates Multiplicandi per ſingulas quantitates Multiplicatoris ſeparatim multiplicari debere*, rem attente conſideranti patebit.

Digitized by Google

46. In hiſce peculiaribus Multiplicationibus obſervandum; *ſi Multiplicandi & Multiplicatoris ſigna fuerint ſimilia Productum eſſe affirmativum, negativum eſſe hoc ſi ſigna fuerint diverſa.*

47. Regula hæc ex examine caſuum peculiarium deducitur; quales tantum quatuor dari facile percipimus; nam omnis Multiplicatio fit per numerum (16.): ergo 1. quantitas affirmativa, ſeu poſitiva, per numerum affirmativum multiplicatur. 2. Quantitas affirmativa in numerum negativum ducitur. 3. Multiplicatio eſt quantitatis negativæ & numeri affirmativi. 4. Tandem Quantitas negativa per numerum negatum multiplicatur.

In primo caſu Productum eſſe affirmativum quis negabit?

In ſecundo caſu eſt negativum; nam multiplicare per numerum negativum eſt tollere, cum multiplicare per numerum poſitivum ſit ponere.

In tertio caſu agitur de quantitate negata, quæ certis vicibus ſumitur, & quæ idcirco negata manet.

Quartus caſus tertio contrarius eſt; quare Productum etiam ſigno contrario afficitur & eſt affirmativum. Tollitur in hoc

ca-

Digitized by Google

caſu negativa quantitas quo negatio evaneſcit. Sic tollere debitum eſt ipſum ſolvere.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{l} a+b \\ d+f \\ \hline ad+bd+af+bf \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{l} 3a+2f-g-m \\ 2a+g-m \\ \hline 6aa+4af-2ag-2am+2gf-gg-gm-2fm+m^2 \\ \qquad +3ag-3am \qquad\qquad +gm \\ \hline 6aa+4af+ag-5am+2gf-gg \qquad -2fm+m^2 \end{array}$$

48 Multiplicationem hoc ſigno $\times$ poſſe exprimi diximus (18.), ſæpe uſu venit hoc in quantitatibus compoſitis, in quo caſu lineæ ducuntur ſupra quantitates multiplicandas, quæ has a reliquis ſeparant, ſic $\overline{a+b}\times\overline{f+g}-gf$ ſignificat gf ſubtrahi ex Producto quantitatum $a+b$ per $f+g$.

49.

49. Quæ de expreſſione Poteſtatum quantitatum ſimplicium dicta ſunt (21.) etiam ad quantitates compoſitas applicari poſſunt, ſi linea ducatur ſupra quantitates, de quibus agitur, $\overline{a+b}^3$ ſignificat Cubum Radicis $a+b$.

DE DIVISIONE.

50. *Diſpoſita aut Ordinata juxta litteræ datæ dimenſiones dicitur quantitas compoſita, quando in primo loco ponitur quantitas ſimplex, quæ litteræ datæ continet Poteſtatem altiſſimam, & quando Poteſtates ſucceſſivè decreſcentes in ſequentibus quantitatibus diſponuntur;*

$$ab^3 + fgb^2 + a^3b + a^4;$$

Juxta dimenſiones litteræ b ordinata eſt quantitas hæc.

51. In hoc caſu ab^3 eſt primus terminus, & Poteſtates decreſcentes ipſius b ſequentes terminos determinant; numeruſque terminorum unitate ſemper excedit indicem Poteſtatis altiſſimæ, continetque quantitas hæc terminos quatuor.

52. Sæpe quidam termini deficiunt; quorum loca vacua relinquenda ſunt. In

hac

Digitized by Google

hac ipſa quantitate, ſi pro littera *a* ordinata fuerit, deficit terminus tertius,

$$a^4 + ba^3 * + b^3a + fgb^2.$$

53. Sæpe termini peculiares conſtant ex quantitatibus compoſitis, ut in hac quantitate.

$$\begin{array}{llll} e^4 & + fe^3 + llee & * & - fl^3 \\ & - ge^3 & & - hmst \end{array}$$

Secundus terminus eſt $fe^3 - ge^3$ & quintus eſt $- fl^3 - hmst$.

54. In his caſibus primam vocamus quantitatem termini cujuſcunque quæ ſuperior eſt, ſed ad libitum ſcribi poſſunt.

Hiſce præmiſſis, regulis ſequentibus Diviſio peragenda eſt.

55. 1. *Ordinanda ſunt juxta dimenſiones ejuſdem litteræ Dividendum & Diviſor.*

2. *Prima quantitas primi termini Dividendi per primam quantitatem primi termini Diviſoris dividitur, & Quotiens notatur.*

3. *Diviſor totus per Quotientem multiplicatur, & ex Dividendo Productum ſubtrahitur.*

4. *Repetitis hiſce operationibus Diviſio abſolvitur, ſummaque Quotientum peculiarium dat Quotientem quæſitum.*

5. *In Diviſionibus peculiaribus obſervandum,*

Digitized by Google

dum, Dividendi & Diviſoris ſigna ſimilia dare Quotientem affirmativum, ſigna diverſa dare Quotientem negativum.

Si abſoluta Diviſione ad operationes attendamus, ex Theoremate n. 35. conſtabit detectum Quotientem verum eſſe.

EXEMPLUM I.

$$\text{Divid.}\begin{cases} ab + dc \\ ac + db \end{cases} \Bigg| \begin{array}{l} a + d \text{ Divis.} \\ \overline{b + c} \text{ Quot.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -ab - db \\ \hline ac + dc \\ -ac - dc \\ \hline \quad 0 \qquad 0 \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\text{Divid.}\, a^3 + ba^2 + b^2a + b^3 \Bigg| \begin{array}{l} a + b \text{ Divis.} \\ \hline aa + bb. \text{ Quot.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -a^3 - ba^2 \\ \hline \quad + bba + b^3 \\ \quad - bba - b^3. \\ \hline \qquad 0 \qquad 0 \end{array}$$

Ex-

Digitized by Google

EXEMPLUM III.

Divid. $a^4 \quad * \quad * \quad * \quad -b^4$	$a-b$ Divis.
	$a^3+baa+b^2a+b^3$

$$-a^4+ba^3$$

$$+ba^3 \qquad -b^4$$
$$-ba^3+b^2a^2$$

$$+b^2a^2 \qquad -b^4$$
$$-b^2a^2+b^3a$$

$$+b^3a-b^4$$
$$-b^3a+b^4$$

$$0 \quad 0$$

56. Ubi hæ operationes ulterius produci non poſſunt, ſuperſtitibus in Dividendo quantitatibus quibuſcunque, Diviſio exacte fieri non poteſt, & RELIQUUM Diviſionis dicuntur quantitates hæ quæ ſuperſunt.

57. In hiſce caſibus totus Quotiens Fractione deſignatur, aut detecto Quotiente Fractio ex Reliquo formata adjicitur.

Si $aa-2ab+2bb$ per $a+b$ dividi debeat, Quotiens erit

Digitized by Google

$\frac{aa - 2ab + 2bb}{a+b}$, aut $a - b + \frac{bb}{a+b}$.

De Radicum Extractione.

58. *RADICUM EXTRACTIO vocatur Radicum inveſtigatio ex datis Poteſtatibus*, eſtque peculiaris ſpecies Diviſionis, in qua Diviſor cum Quotiente quæruntur, data horum relatione.

59. Ubi de quantitatibus ſimplicibus agitur, ſine difficultate Radix detegitur, ſi extrahi poſſit; a^2 Radicem quadratam habet a; a^4 Radicem habet aa; tandem ab eſt Radix Quadrati $aabb$.

Eodem modo liquet a^3 habere Radicem cubicam a; a^3b^3 habet Radicem ab.

Circa quantitates compoſitas explicabo, quæ ſpectant Radices quadratas & cubicas, ex quibus facile deduci poterunt extractiones Radicum reliquarum Poteſtatum.

In extractione Radicum quadratarum obſervandum, in omni Quadrato quantitatis compoſitæ dari quadrata quantitatum peculiarium, ex quibus Radix conſtat; ex qua obſervatione deducimus methodum detegendæ Radicis tentandæ.

Exem-

Digitized by Google

EXEMPLUM I.

Quæritur Radix quadrata quantitatis, *aa* + 2*ab* + *bb*.

Continet Quantitas hæc quadrata duo peculiaria *aa* & *bb*, ex his Radices extraho *a* & *b*, quas in unam ſummam colligo, & habeo *a* + *b* Radicem tentandam; cujus Quadratum eſt ipſa quantitas propoſita.

60. Quando Radicis detectæ Quadratum a quantitate propoſita differt, non poteſt hujus Radix extrahi.

EXEMPLUM II.

aa + *ab* + *bb*.

Radix tentanda eſt iterum *a* + *b*. Cujus Quadratum *aa* + 2*ab* + *bb* à quantitate propoſita differt; ideo hujus Radix extrahi non poteſt.

61. Quomodo ſigna quantitatum radicalium determinentur, quando non omnes quantitates in Quadrato propoſito ſunt affirmativæ in exemplo ſequenti explicamus.

Digitized by Google

EXEMPLUM III.

$$aa + 2ab - 2bc + bb + cc - 2ac.$$

Trium Quadratorum aa, bb, cc, extraho Radices a, b, c. Cum omne Quadratum ſit affirmativum (46.), ſigna adhuc dum latent; ſed Productum affirmativum $+2ab$ indicat quantitatum a & b ſigna eſſe ſimilia (46.); b vero & c habere ſigna diverſa demonſtrat $-2bc$ (46.) Radix ergo tentanda eſt $a+b-c$ aut $c-a-b$; utriuſque Quadratum eſt quantitas propoſita.

62. Sæpe Quadratum ſupplendum eſt, ut in exemplo ſequenti.

EXEMPLUM IV.

$$a^4 - 2a^3b - aabb + 2ab^3 + b^4.$$

Continet quantitas hæc tantum Quadrata duo a^4 & b^4, quorum Radices non ſufficiunt; ſed video Quadratum potuiſſe tolli quantitate ſigno contrario affectâ; datur enim $-aabb$, quæ quantitas eſſet Quadratum ſi affirmativa eſſet, addo ideo quantitati propoſitæ $+aabb-aabb$, quo quantitas non mutatur, & eſt hæc,

$$a^4 - 2a^3b - 2aabb + aabb + 2ab^3 + b^4$$

Cujus Radix tentanda eſt

$aa - ab - bb$, aut $bb + ab - aa$, & utriuſque Quadratum eſt quantitas propoſita.

EXEMPLUM V.

$$a^4 + 2a^3b + 3aabb + 2ab^3 + b^4$$

Continet tantum duo Quadrata, quorum Radices non ſufficiunt, ſed $3aabb$ poteſt ſic exprimi $2aabb + aabb$, in quo caſu datur tertium Quadratum $aabb$, & Radix tentanda eſt $aa + ab + bb$ quæ vera eſt.

63. Methodus ſimilis eſt, ſi agatur de Radicibus cubicis; nam ex Cubi formatione conſtat, dari in Cubo quantitatis compoſitæ Cubos quantitatum peculiarium quæ in Radice continentur.

Quod autem ad ſigna attinet, facilius hæc deteguntur, cùm Cubus eodem ſigno cum Radice afficiatur, quod in omni poteſtate, cujus Index eſt numerus impar locum habet.

EXEMPLUM

$$a^3 - 3aab + 3abb - b^3,$$

Radix tentanda eſt $a - b$, cujus Cubus eſt quantitas quæſita.

64. *Ubi Radix extrahi non poteſt, hæc ſigno peculiari deſignatur.* $\sqrt{ab}$ valet Radicem quadratam quantitatis ab; $\sqrt{aa+bb}$ eſt Radix quadrata $aa+bb$.

Radicis cubicæ ſignum eſt $\sqrt[3]{}$; Radicis quartæ Poteſtatis $\sqrt[4]{}$; & ſic de cæteris.

65. *Radices ſignis his expreſſæ Surdæ quantitates dicuntur.*

CAPUT IV.

De Fractionibus.

66. GEnerale hoc Theorema præmittendum: *Quotientem Diviſionis non mutari, ſi Dividendum & Diviſor per eandem quantitatem multiplicentur, aut dividantur.*

Poteſt ab deſignare Dividendum quodcunque; a Diviſorem quemcunque; & Quotiens erit b. Multiplicatis ab & a per d, & Divi-

Digitized by Google

viſo abd per ad, eſt etiam b Quotiens. Similis eſt demonſtratio ubi de Diviſione agitur.

67. In omni Fractione Numerator eſt Dividendum, Denominator eſt Diviſor, Fractio eſt Quotiens (38. & ſeq.) ergo *multiplicatis, aut diviſis, Numeratore & Denominatore per eandem quantitatem non mutatur Fractio* (66.)

68. Multiplicando quantitatem per unitatem non mutatur, ergo etiam manet ſi per unitatem dividatur (31.) Idcirco

69. *Integram quantitatem in Fractionem mutamus, ſi, dum ipſa in Numeratore ponitur, habeat Unitatem in Denominatore.* $a+b$ valet $\frac{a+b.}{1}$

70. *Quantitas integra reducitur in Fractionem cujus Denominator datur*; ſi Fractionis, per regulam præcedentem detectæ, Numeratorem & Denominatorem per datum Denominatorem multiplicemus (67.). Ita $a+b$ reducitur in Fractionem cujus Denominator eſt d, ſi Fractionem $\frac{a+b}{1}$ mutemus in hanc $\frac{ad+bd.}{d}$

71. Quæ regula ad ipſam unitatem poteſt applicari; & $\frac{1}{1}$ valet unitatem ut &

$\frac{d}{d}$, etiam $\frac{aa+bb}{aa+bb}$ &c.

Fractio ad ſimpliciorem reduci poteſt, ſi Numerator & Denominator communem habeant Diviſorem (67.) Et quidem quo major eſt hic Diviſor, eo ad ſimpliciorem.

72. *Reducitur Fractio ad omnium quam poteſt ſimpliciſſimam, ſi Numerator & Denominator per maximum communem Diviſorem dividantur.*

Methodum idcirco tradam, qua maximus communis Diviſor duarum quantitatum inveſtigatur.

DE COMMUNI DIVISORE DETEGENDO.

TAB. I. *fig.* 1. 73. Sint AB & CD lineæ datæ, quarum maxima communis menſura quæritur.

Si minor exacte menſuret majorem, erit ipſa CD menſura quæſita.

Si non, ſed detur reliquum EB, poſtquam minor quoties hoc fieri potuit ſubtracta fuit e majori: clarum eſt menſuram quæſitam, quæ menſurat CD, hanc ipſam repetitam etiam menſurare, id eſt AE; ſed debet quoque menſurare AB; ergo & EB.

Quæ-

Quærenda idcirco eſt maxima communis menſura reliqui EB & minoris quantitatis CD.

Si reliquum EB exacte menſuret CD, erit EB menſura quæſita, ſi non menſuret, tolli debet EB ex CD quoties poteſt, & demonſtratione ſimili præcedenti conſtabit, quærendam eſſe maximam communem menſuram reliqui hujus ultimi & reliqui præcedentis EB; operationemque eodem modo eſſe continuandam donec reliquum ultimum præcedens reliquum exacte menſuret. Ex his hanc deducimus regulam.

74. *Datis duabus quantitatibus quarum maximus communis Diviſor quæritur; majorem per minorem divido; rejecto Quotiente, minorem per reliquum divido; operationemque continuo, rejiciendo ſemper Quotientes, & dividendo Diviſorem ultimæ Diviſionis per reliquum ejuſdem, donec ad Diviſionem perveniam ſine reliquo, eſtque hujus Diviſionis Diviſor quantitas quæſita.*

Sufficit hæc regula quamdiu de numeris agitur, & ad unitatem conducit, ſi alium communem Diviſorem non habeant.

Si quantitates propoſitæ algebraicæ

Digitized by Google

fuerint, in ſingulis Diviſionibus hæc duo præterea obſervanda.

75. *Tentandum an non totus Diviſor poſſit dividi per quantitatem, ſive ſimplicem ſive compoſitam, per quam primus terminus Diviſoris hujus dividi poteſt.*

76. *Si primus terminus Diviſoris non exacte poſſit dividere primum terminum Dividendi, multiplicandum eſt integrum Dividendum per quantitatem quæ dat hanc Diviſionem exactam.* Detegitur hæc quantitas ſimplici conſideratione quantitatum levi attentione.

EXEMPLUM I.

Quæritur communis maximus Diviſor duarum harum quantitatum, quam utramque ordinavi juxta dimenſiones litteræ a;

$$\begin{array}{l} a^3 * + bda + bbd \\ \quad\;\; - bba - bdd \\ \quad\;\; - dda \end{array}$$

&

$$a^3 + daa - bba - bbd$$

DIVISIO 1ª.

Divido primam per ſecundam & Quotiens

tiens eſt 1., quem negligo, reliquum eſt

$$-daa+bda+2bbd$$
$$-dda-bdd,$$

quod divido per d (75), & habeo

$$-aa+ba+2bb$$
$$-da-bd$$

DIVISIO 2ª.

Per hanc quantitatem divido primum Diviſorem, Quotiens qui negligitur eſt $-a$, & reſtat,

$$baa+bba-bbd,$$
$$-bda$$

quo diviſo per b (75) datur

$$aa+ba-bd$$
$$-da$$

DIVISIO 3ª.

Per hoc ultimum reliquum, divido Diviſorem ultimæ Diviſionis & Quotiens eſt $-1.$; reliquum eſt

$$2ba+2bb$$
$$-2da-2bd.$$

Quam quantitatem divido per $2b-2d$, & $a+b$ Quotiens eſt quartæ Diviſionis Diviſor (75).

DIVISIO 4ta.

Per $a+b$ divido Diviſorem tertiæ Diviſionis & nullum datur reliquum, eſt ergo $a+b$ maximus communis Diviſor quæſitus.

Ex-

Digitized by Google

Diviſio primæ quantitatis ſine reliquo procedit; non tamen eſt $a - b$ maximus communis Diviſor.

78. *Et nunquam maximus Diviſor communis habetur quando, in Diviſione quacunque, quantitas per quam reducimus Diviſorem, eſt etiam Diviſor Dividendi, aut cum Dividendo communem Diviſorem habet*; ut in hoc caſu in quo

$$gc + gd + lc + ld,$$

Poteſt dividi per $c + d$, per quam etiam primam ex datis quantitatibus poſſumus dividere.

79. Ut ergo perveniamus ad maximum communem Diviſorem, *debemus id ſingulis Diviſionibus examinare, an non quantitas, per quam Diviſorem reducimus, habeat communem Diviſorem cum Dividendo hujus Diviſionis; qui ſi detur, debemus per hunc ipſum dividere Dividendum ut reducatur, & poſt integram operationem abſolutam debemus per hunc peculiarem Diviſorem multiplicare communem Diviſorem detectum.*

In ultimo exemplo ubi percepi reductionem Diviſoris fieri Diviſione per $gc + gd + lc + ld$, quæro an non hæc quantitas cum Dividendo, id eſt, cum prima ex propoſitis quantitatibus communem Diviſorem habeat &

de-

detego $c+d$, per quem primam illam quantitatem divido quæ ad hanc reducitur.

$$\frac{ad - bd}{af - bf}$$

Antea Diviſorem jam reduxi ad $a-b$, & cum Diviſio ſine reliquo procedat, eſt ipſe maximus harum quantitatum communis Diviſor; multiplico ergo $a-b$ per $c+d$ & erit $ac+ad-bc-bd$ maximus communis Diviſor quantitatum propoſitarum.

De Reductione Fractionum ad Communem Denominationem.

80. *Fractiones variæ reducuntur ad communem Denominatorem, multiplicando ſingularum Numeratores & Denominatores per omnium aliarum Denominatores.* Qua operatione ſingulæ Fractiones non mutantur(67.)

Exemplum.

Fractiones reducendæ

$$\frac{ab}{f},\quad \frac{chd}{bl},\quad \frac{q}{r},$$

Fractiones reductæ,

$abblr$

$$\frac{abhlr}{fhlr}, \quad \frac{cbdfr}{fhlr}, \quad \frac{qfhl}{fhlr}.$$

81. *Si duo aut plures Denominatores communem Diviſorem habeant, hi ante operationem per hunc dividi poſſunt, ſi tunc, abſoluta operatione, Denominator communis ut & Numerator, illarum Fractionum quarum Denominatores non fuere diviſi, multiplicentur per communem Diviſorem, ſimpliciores erunt Fractiones reductæ.*

EXEMPLUM.

Fractiones reducendæ,

$$\frac{l}{s}, \quad \frac{abd}{lh}, \quad \frac{f^3}{mh}:$$

Communis Diviſor duorum Denominatorum eſt h, &

$$\frac{llmh}{slmh}, \quad \frac{abdsm}{slmh}, \quad \frac{f^3sl}{slmh},$$

ſunt Fractiones reductæ. Exemplum ipſum demonſtrationem manifeſtam facit.

DE ADDITIONE ET SUBTRACTIONE FRACTIONUM.

82. *Reductis Fractionibus ad communem Denominationem, addendi aut ſubtrahendi ſunt Numeratores.*

Ex-

Digitized by Google

EXEMPLA

Datis $\frac{ad}{b}$, $\frac{fs}{b}$, $\frac{ml}{t}$,

Summa eſt

$$\frac{adbt + fsbt + mlbb}{bbt}$$

Duarum primarum, facta Subtractione, differentia eſt,

$$\frac{adb - fsb}{bb}$$

Datis $\frac{afr}{ad + bd}$, $\frac{l^3 - mb^2}{aa - bb}$

Summa eſt

$$\frac{aafr - afrb + dl^3 - dmb^2}{aad - bbd}$$

Differentia eſt

$$\frac{aafr - afrb - dl^3 + dmb^2}{aad - bbd}$$

DE MULTIPLICATIONE.

Multiplicatio Fractionum hoc nititur Theoremate.

83. *Productum Quotientum detegitur, ſi Productum Dividendorum per Productum Di-*

 vi-

viſorum dividatur.

Sit *ab* Dividendum, *a* Diviſor, Quotiens eſt *b*. Iterum *cd* Dividendum, *c* Diviſor, Quotiens *d*. Poſſunt quantitates hæ Quotientes, Diviſores, & Dividenda, omnia poſſibilia repræſentare. Productum Quotientum eſt *bd*; quod etiam detegitur ſi *abcd*, Productum Dividendorum, per *ac*, Productum Diviſorum, dividatur.

84. *Fractiones* ſunt Quotientes, & *multiplicantur* hæ, *multiplicatis Numeratoribus & Denominatoribus* (38. 83.)

EXEMPLA.

$$\frac{af}{d} \text{ per } \frac{as}{m}, \text{ dat } \frac{aafs}{dm}$$

$$\frac{bm}{a+b} \text{per } \frac{lm}{a-b}, \text{ dat } \frac{blm^2}{aa-bb}$$

85. Ut Fractio quæ Productum exprimit ſit omnium ſimpliciſſima, non ſufficit Fractiones ante Multiplicationem reduxiſſe ad ſimpliciſſimas; nam, ſi Numerator unius cum alîus Denominatore communem Diviſorem habeant, Productum reduci poterit, unde pro Reductione hanc deducimus regulam.

86. *Reductis Fractionibus ad ſimpliciſſimas,*

mas, permutatis Denominatoribus iterum reducendæ ſunt. Permutatione hac Fractiones quidem mutantur, ſed Productum non variat.

EXEMPLUM.

Sint Fractiones multiplicandæ

$$\frac{da^4 - db^4}{fgaa + fgbb}, \quad \frac{fl^3}{aal + 2alb + lbb}.$$

Fractiones reductæ erunt

$$\frac{daa - dbb}{fg}, \quad \frac{fl^2}{aa + 2ab + bb}.$$

Sunt eædem permutatis Denominatoribus

$$\frac{daa - dbb}{aa + 2ab + bb}, \quad \frac{fl^2}{fg}.$$

Iterum reductæ ſunt

$$\frac{da - db}{a + b}, \quad \frac{l^2}{g}.$$

Productum eſt

$$\frac{dal^2 - dbl^2}{ag + bg}.$$

87. *Si Fractio multiplicetur per Denominatorem productum eſt Numerator* (35. 40 41.)

DE DIVISIONE.

88. *Diviſio Fractionum eſt Diviſio Quo-*

 tien-

tientum duarum Diviſionum (38.39.), *quæ ſervatis Dividendis & Diviſoribus exprimuntur.*

Sit *abc* Dividendum quodcunque, *a* Diviſor, Quotiens eſt *bc*; qui dividi debet per Quotientem hujus alius Diviſionis *cd* per *d*, cujus Quotiens eſt *c*. Diviſis Quotientibus *bc* per *c*, habemus *b* Quotientem, quem unica diviſione etiam detegimus.

89. *Dividendum primæ Diviſionis multiplicamus per Diviſorem ſecundæ, & Productum* abcd *dividimus per Productum* acd *Dividendi ſecundæ Diviſionis ducti in Diviſorem primæ, & habemus* b *Quotientem Quotientum.* Diviſiones de quibus in his agitur omnes Diviſiones poſſibiles repræſentant.

Sint nunc Fractiones $\frac{a}{b}$ & $\frac{d}{c}$, quarum prima dividi debet per ſecundam; Dividendum primæ Diviſionis eſt *a*, Diviſor *b*, Quotiens eſt Fractio $\frac{a}{b}$ (38.39.) ſecundæ Diviſionis Dividendum *d*, Diviſor *c*, Quotiens $\frac{d}{c}$.

Si nunc *ac* dividamus per *db* habebimus Fra-

Digitized by Google

Fractionum Quotientem $\frac{ac}{db}$ (89.).

90. Hanc *Fractionum Diviſionem ad harum multiplicationem reducimus, ſi Diviſoris Numeratorem in Denominatorem mutemus.*

Diviſor eſt $\frac{d}{c}$, facta permutatione eſt $\frac{c}{d}$, quæ Fractio, ſi per $\frac{a}{b}$ multiplicetur, dat Quotientem jam detectum $\frac{ac}{db}$.

Omnia quæ de Multiplicatione Fractionum fuere obſervata (84. 85.) & hîc applicari debere, poſt Numeratoris transpoſitionem, manifeſtum eſt.

DE EXTRACTIONE RADICUM.

Quadratum Fractionis $\frac{a}{b}$ eſt $\frac{aa}{bb}$ (84.) cubus eſt $\frac{a^3}{b^3}$; unde ſequitur,

91. *Radicem Fractionis detegi, ſi ſeparatim ex Numeratore & Denominatore Radices extrahantur*; quare hîc referenda ſunt quæ ſuperius (58. & ſeq.) de Radi-

Digitized by Google

dicum Extractione explicata ſunt.

EXEMPLA RADICUM QUADRATARUM.

$$\frac{aa + 2ab + bb}{bb}$$

Habet Radicem $\frac{a + b}{b}$.

$\frac{bb}{df}$ habet Radicem $\frac{b}{\sqrt{df}}$.

$\frac{fd + gh}{dm}$ habet Radicem $\frac{\sqrt{fd + gh}}{\sqrt{dm}}$ aut $\sqrt{\frac{fd + gh}{dm}}$.

CAPUT V.

De Quantitatibus ſurdis.

92. *SUrdæ Quantitates ſæpe ad ſimpliciores reduci poſſunt*, quæ Reductio hoc Theoremate nititur.

93. *Radix Producti habetur, multiplicatis Radicibus Quantitatum multiplicandarum.* Patet hoc ſi ſint multiplicandæ Quantitates *aa* & *bb*, harum radices ſunt *a* & *b*,

b, & Radicum Productum eſt ab Radix Producti $aabb$.

94. Sit nunc $\sqrt{aabd}$, poteſt hæc reduci; nam eſt hæc Radix Producti aa per bd, quarum quantitatum Radices ſunt a & $\sqrt{bd}$; & harum Productum $a\sqrt{bd}$ valet Radicem propoſitam (93.) Eodem modo $\sqrt[3]{a^3b}$ valet $a \times \sqrt[3]{b}$.

95. In hoc caſu quantitas cujus Radix ſigno radicali exprimitur, ut in hoc caſu b, dicitur SUB SIGNO; alia, ut a, eſt EXTRA SIGNUM.

96. *Radices, ejusdem Poteſtatis, quæ, ubi ad ſimpliciſſimas ſunt reductæ, eandem Quantitatem ſub ſigno habent, dicuntur* COMMUNICANTES, ut $\sqrt{aab}$ & $\sqrt{ccb}$ quæ ad has reducantur $a\sqrt{b}$, $c\sqrt{b}$.

97. *Poteſt ſignum radicale variari, non mutata ipſa Radice quæ exprimitur*, patet enim $\sqrt{aa}$, $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[4]{a^4}$, $\sqrt[5]{a^5}$ &c. eandem Radicem a deſignare.

98. *Hæc mutatio fit, dum quantitas ſub ſigno elevatur ad Poteſtatem per cujus Indicem multiplicatur Index ſigni radicalis*, ſic $\sqrt[3]{a^3}$ non mutatur ſi, dum Index ſigni multiplicatur per 2 ut fiat $\sqrt[6]{}$, a^3 ad ſecundam Poteſtatem elevetur, & mutetur in a^6,

Digitized by Google

$\sqrt[6]{a^6}$ valet $\sqrt[3]{a^3}$.

99. Hinc deducimus regulam qua *variæ Radices ad commune ſignum radicale reducuntur.*

100. Sed dicendum antea quomodo detegatur *numerus omnium minimus qui exacte per ſingulos Indices ſignorum radicalium datorum dividi poteſt;* nam *eſt* hic *Index ſigni quæſiti*, ſi agatur de reductione omnium ſimpliciſſima.

101. *Productum omnium Indicum, per ſingulos* quidem *exacte dividitur, ſed ſi quidam inter hos communem Diviſorem habeant* non eſt Productum tale numerus minimus, qui per omnes Indices dividitur. In hoc caſu Indices *hi omnes*, qui communem Diviſorem habent, *uno tantum excepto, per ipſum dividi debent, & Quotientes loco Indicum in Multiplicatione adhibendi ſunt.*

Quantitas omnium minima, quæ per has quinque dividitur, *ab*, *df*, *alm*, *ln*, *ag*, ſic detegitur. Ex tribus quantitatibus *ab*, *alm*, *ag*, quæ communem Diviſorem habent *a*, duæ, ut *ab*, *alm*, per *a* dividuntur, & habemus *b*, *df*, *lm*, *ln*, *ag*. Inter has duæ *lm*, *ln*, communem Diviſorem habent *l*, quarum una dividitur per *l*, & datæ quantitates reducuntur ad has *b*,

df,

Digitized by Google

df, *m*, *ln*, *ag*, quarum Productum *bdfmlnag* per ſingulas datas diviſibile eſſe, ex ipſa operatione ſequitur.

102. *Ubi commune ſignum radicale detectum eſt, ſingulæ Radices ad hoc reducuntur, ſi communis Index per Indicem Radicis dividatur, & quantitas ſub ſigno elevetur ad Poteſtatem cujus Index eſt Quotiens hujus Diviſionis*, ut hoc ex ante explicatis (98.) ſequitur.

EXEMPLUM.

$$\sqrt{ab},\ \sqrt[3]{ab^2},\ \sqrt[4]{a^3d}.$$

Reducuntur ad

$$\sqrt[12]{a^6b^6},\ \sqrt[12]{a^4b^8},\ \sqrt[12]{a^9d^3}.$$

In operationibus ſequentibus ponimus Radices eſſe reductàs ad commune ſignum radicale, & Multiplicationem Diviſionemque, poſtea Additionem & Subtractionem explicabimus.

DE MULTIPLICATIONE.

Radicum Multiplicatio hoc Theoremate nititur.

103. *Productum Radicum habetur ſi Radix ex Producto Poteſtatum extrahatur.*

Quadrata quæcunque deſignare poſſunt *aa* & *bb*; Radices ſunt *a* & *b*, & harum Productum eſt *ab*, quod detegitur ſi multiplicatis *aa* & *bb* ex Producto *aabb* Radix quadrata *ab* extrahatur. Nec diverſa eſt Demonſtratio ſi de alia Poteſtate agatur.

104. *In Multiplicatione Radicum ſervatur ſignum radicale, multiplicatis quantitatibus quæ ſunt ſub ſignis.*

EXEMPLA.

$\sqrt{a}$ per $\sqrt{b}$ dat $\sqrt{ab}$

$\sqrt{a+b}$ per $\sqrt{a-b}$ dat $\sqrt{aa-bb}$.

105. *Si Radices per quantitates rationales multiplicentur*, id eſt, ſi quantitates dentur extra ſignum, *hæ ſeparatim multiplicari debent.*

EXEMPLA.

$a\sqrt{b}$ per $d\sqrt{c}$ dat $ab\sqrt{bc}$

$a\sqrt{b}$ per $e\sqrt{b}$ dat $ae\sqrt{bb}$ aut aeb

106. *Ubi de quantitatibus compoſitis agitur, regulæ ſuperius traditæ (45. 46.) uſu veniunt.*

DE

Digitized by Google

DE DIVISIONE.

107. Cum Diviſione ſolvatur quod Multiplicatione fuit compoſitum, patet *in Diviſione Radicum, diviſis quantitatibus quæ ſunt ſub ſignis, ſignum ipſum ſervandum eſſe.*

EXEMPLA.

$\sqrt{ab}$ per $\sqrt{a}$ dat $\sqrt{b}$ (35. 104.).
$ad\sqrt{bc}$ per $a\sqrt{b}$ dat $d\sqrt{c}$ (35. 105.).

108. *In quantitatibus compoſitis Diviſio fit per partes*, ut hoc ſuperius (55.) explicavimus.

EXEMPLUM.

$$\begin{array}{l|l} adb + a\sqrt{fghb} - db\sqrt{df} - f\sqrt{dbgh} & a\sqrt{b} - \sqrt{dbf} \\ \hline -adb \qquad\qquad + db\sqrt{df} & d\sqrt{b} + \sqrt{fgb} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \hline +a\sqrt{fghb} & -f\sqrt{dbgh} \\ -a\sqrt{fghb} & +f\sqrt{dbgh} \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

DE

DE RADICUM EXTRACTIONE.

109. *Radicum extractio fit, aut extrahendo Radicem ex quantitate ſub ſigno, aut mutando Indicem ſigni radicalis, aut adhibito novo ſigno radicali.*

Radix quadrata $\sqrt[3]{aa}$ eſt $\sqrt[3]{a}$.

Radix quadrata $\sqrt[3]{ab}$ eſt $\sqrt[6]{ab}$.

Radix quadrata $a+\sqrt{bd}$ eſt $\sqrt{a+\sqrt{bd}}$.

Alia quæ circa has Extractiones obſervari poſſunt altioris ſunt indaginis.

DE ADDITIONE ET SUBTRACTIONE.

110. *In Radicum Additione & Subtractione obſervanda ſunt quæ de quantibus ſimplicibus & compoſitis fuere dicta* (14. 43. 15. 44.)

111. Notandum verô, ſummam & aliter poſſe exprimi: nam ſumma Radicum $\sqrt{d}$ & $\sqrt{f}$ eſt quidem $\sqrt{d}+\sqrt{f}$, ſed hæc eadem ſumma eſt $\sqrt{d+f+2\sqrt{bd}}$.

Differentia earundem eſt $\sqrt{d}-\sqrt{f}$, aut $\sqrt{d+f-2\sqrt{df}}$.

Demonſtratio facilis eſt, ſi ad hoc attendamus, ſummam duarum quantitatum dari, ſi Radicem quadratam extrahamus ex quadráto ſummæ. Quadratum autem quan-

Digitized by Google

quantitatis $\surd d + \surd f$ eſt $d + f + 2 \surd df$.

Eodem modo differentia quantitatum earundem habetur, ſi Radicem extrahamus ex quadrato differentiæ.

Simile quid circa Radices cubicas & alias indicari poſſet; ſed non magni uſus hæc forent.

112. Summa Radicum communicantium & aliter exprimitur; nam $a\surd b + d\surd b$ valet $\overline{a+b}\surd b$.

113. Utrum autem communicantes ſint Radices detegitur Mulplicatione. Si de quadratis Radicibus agatur ex Producto quantitatum quæ ſunt ſub ſignis Radix quadrata exacte extrahi poteſt.

Sint $\surd \overline{aab}$ & $\surd \overline{ddb}$, Productum $aabddb$ habet Radicem quadratam abd.

114. Si de Radicibus cubicis agatur, quantitas una ad Quadratum elevatur, & hoc per quantitatem aliam multiplicatur, ex quo Producto Radix cubica extrahi poteſt, quando Radices communicantes ſunt.

Sint $\sqrt[3]{a^3b}$ & $\sqrt[3]{d^3b}$, Quadratum a^6bb multiplico per d^3b, & Productum $a^6d^3b^3$ habet Radicem cubicam $aadb$.

115. Si de Radicibus quartæ Poteſtatis agatur, ad cubum elevatur quantitas una, &

& cubus hic per aliam quantitatem multiplicatur.

116. Et in genere ſi Radicis Index ſit *n* ad Poteſtatem *n*-1 elevandam eſſe quantitatem unam, ex explicatis ſatis manifeſtum eſt.

CAPUT VI.

De Proportionibus & Progreſſionibus.

117. Signum Æqualitatis eſt hoc =. Obſervavimus in primo Capite omnem quantitatum comparationem ad Additionem, Subtractionem, Multiplicationem, aut Diviſionem referri.

118. Additio & Subtractio opponuntur, ut & Multiplicatio & Diviſio; quare *ad duas claſſes* commode *referantur quæ comparationes quantitatum ſpectant.*

Nam in duarum quantitatum comparatione, aut attendimus ad ipſarum differentiam, id eſt ad quantitatem uni addendam ut formetur alia; aut conſideramus quomodo una in alia contineatur, id eſt, per quem numerum, qui & ſurdus eſſe poteſt, illam debeamus multiplicare, ut hanc habeamus.

Circa ambas has comparationes varia obſervanda ſunt antequam ad genera-

Digitized by Google

raliores regulas tranſeamus, quibus veritas inveſtigatur & Problemata ſolvuntur.

119. *Si datis quatuor quantitatibus primarum duarum differentia æqualis ſit differentiæ ultimarum, dicuntur quantitates in Proportione Arithmetica.*

120. Quod tribus punctis ·:· notatur; ut 5,7 ·:· 13,15. aut a, b ·:· c, d.

121. In omni Proportione prima & ultima quantitas vocantur EXTREMA, reliquæ dicuntur MEDIA.

122. *In* hac *Proportione Arithmetica* a, b ·:· c, d, ex natura proportionis $a-b=c-d$ (119.); ſi utrimque addamus $b+d$ non turbamus æqualitatem, & eſt $a+d=c+b$, *ſumma Extremorum æqualis ſummæ Mediorum.*

123. *Proportio Arithmetica dicitur continua, quando primus terminus cum ſecundo differt, quantum hic cum tertio,* ut f, g ·:· g, h; quæ proportio etiam ſic exprimitur ÷ f, g, h.

124. *Progreſſio Arithmetica vocatur, ſeries quantitatum quarum immediate ſequentes æqualiter differunt*; ut 6, 9, 12, 15, 18; hæc deſignatur hoc eodem ſigno ÷; ut ÷ a, b, c, d, e, f, g.

125. Hæc eadem Progreſſio, ſi diffe-

ren-

Digitized by Google

rentia inter terminos vicinos ſit n, & ſecundus primum excedat, ſic poteſt exprimi;

$\div a, a+n, a+2n, a+3n, a+4n$, &c.

& videmus quomodo, *datis duobus primis terminis, terminus quicunque detegitur*; decimus ex gr. eſt $a+9n$.

In memorata Progreſſione habemus proportiones has, $a, b \therefore f, g$, & $b, c \therefore e, f$ ut & $c, d \therefore d, e$: ex his deducimus $a+g = b+f = c+e = 2d$, (122.) ergo $a+b+c+d+e+f+g = 3\frac{1}{2} \times \overline{a+g}$: unde generalem formamus regulam.

126. *Summam Progreſſionis arithmeticæ valere Productum ſummæ, primi & ultimi termini, per dimidium numeri terminorum.*

127. Quantitatum Comparatio alia de qua locuti ſumus (118.), Diviſione determinatur; Quotiens enim exprimit quomodo quantitas in alia quantitate contineatur, & relatio hæc vocatur RATIO.

128. Detegimus rationem quæ datur in a & b ſi a per b dividamus, & Quotiens vocatur EXPONENS Rationis.

129. Primam quantitatem per ſecundam dividimus, ut Ratio determinetur;

$\frac{a}{b}$

$\frac{a}{b}$ eſt Exponens Rationis inter *a* & *b*;

contra $\frac{a}{b}$ eſt Exponens Rationis *b* ad *a*.

130. Primus terminus Rationis ANTECEDENS vocatur, ſecundus CONSEQUENS dicitur.

131. Ratio eo major dicitur, quo Exponens majus eſt, & vice verſa.

132. Rationes æquales dicuntur ſi Exponentia fuerint æqualia; in hoc enim caſu Conſequens utrumque eodem modo in ſuo Antecedente continetur.

133. *Quatuor quantitates, quarum prima habet ad ſecundam eandem rationem, quam habet tertia ad quartam, dicuntur in Proportione Geometrica*, aut ſimpliciter Proportionem formare.

134. Hæc eſt nota :: hujus Proportionis.

a, *b* :: *c*, *d*,

ſignificat *a* ſe habere ad *b*, ut *c* ad *d*.

Quare diviſo *a* per *b*, Quotiens non differt à Quotiente qui habetur diviſo *c* per *d* (127.), id eſt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Si quantitatem utramque multiplice-

D mus

mus per bd, habemus $ad = bc$; unde ſequitur *in omni Proportione Productum Extremorum æquari Producto Mediorum.*

135. Inverſa hujus Propoſitionis etiam vera eſt; *Quantitates eſſe Proportionales ſi Productum Extremorum æquale ſit Producto Mediorum.*

Si $fg = hl$, dico $f, h :: l, g$.

Si enim utramque quantitatem dividamus per gh, habemus $\frac{f}{h} = \frac{l}{g}$, quod æqualitatem Rationum f ad h, & l ad g, demonſtrat.

136. *Ex una Proportione variæ formari poſſunt.*

Sit	$a, b :: c, d.$
Invertendo	$b, a :: d, c.$
Alternando	$a, c :: b, d.$
Componendo	$a + b, b :: c + d, d.$
Dividendo	$a - b, b :: c - d, d.$
Convertendo	$a, a \pm b :: c, c \pm d.$

In his agitur ſemper de prima Proportione $a, b :: c, d$.

Proportiones has omnes dari clarum eſt (135.); Productum enim Extremorum valere Productum Mediorum ſimplici multiplicatione patet, ſi ad hoc attendamus da-

dari in prima proportione $ad = bc$ (134.).

137. Eodem modo probamus, datis duabus Proportionibus quibuscunque, ut

$a, b :: c, d,$

$f, g :: h, l,$

hanc aliam multiplicatione formari

$af, bg :: ch, dl.$

138. Si eadem Ratio locum habeat in utraque Proportione, erit etiam

$a+f, b+g :: c+h, d+l.$

139. *Rationem inter duas quantitates non mutari, multiplicatis aut diviſis bis per eandem quantitatem*, ex Theoremate ante demonſtrato ſequitur (66.).

140. *Si dentur variæ Rationes æquales, ſumma Antecedentium ſe habet ad ſummam Conſequentium, ut Antecedens unum ad ſuum Conſequens.*

Sint $a, b :: c, d :: e, f :: g, h :: i, l.$

Altern. $a, c :: b, d.$

Comp. $a+c, c :: b+d, d.$

Alt. $a+c, b+d :: c, d :: e, f.$

Alt. $a+c, e :: b+d, f.$

Comp. $a+c+e, e :: b+d+f, f.$

Alt. $a+c+e, b+d+f :: e, f.$

Eodem modo continuando patebit $a+c+e+g+i, b+d+f+h+l :: i, l,$ aut a ad b.

 141. *Si*

141. *Si ſint duo Ordines quantitatum; & prima ſit ad ſecundam in primo Ordine, ut prima ad ſecundam in ſecundo Ordine; & ut ſecunda ad tertiam in primo, ſic ſecunda ad tertiam in ſecundo Ordine; & ſic de reliquis: erit ſumma omnium quantitatum in primo Ordine ad ſummam ſecundi ordinis, ut quantitas quæcunque in primo ad reſpondentem in ſecundo.*

Sit a, b, c, d, primus Ordo.
f, g, h, i, ſecundus.
$a, b :: f, g;$
$b, c :: g, h;$
$c, d :: h, i;$
Ergo Alternando
$a, f :: b, g :: c, h :: d, i;$
&
$a+b+c+d, f+g+h+i, :: a, f,$
(140.)

Ratio dicitur inverſa alîus, quando Antecedens unius ſe habet ad ſuum Conſequens, ut alterius Antecedens ad ſuum Conſequens. Et quantitas mutabilis inverſam alîus ſequi Rationem dicitur, quando minuitur illa ut augetur hæc, & vice verſa.

142. *Datis variis quantitatibus, aliæ quæ*

quæ ſunt inverſè ut hæ deteguntur, ſi eadem quantitas per ſingulas dividatur; $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, ſunt reſpective inverſe ut *a*, *b*, *c*: nam $\frac{1}{a}, \frac{1}{b} :: b, a$ (135.); ut patet, facta Extremorum & Mediorum multiplicatione.

143. *Tres quantitates in continua Proportione dicuntur, ſi prima ſe habeat ad ſecundam, ut hæc ad tertiam.*

144. Hæc eſt hujus Proportionis nota ∺.

∺ *a*, *b*, *c*, ſignificat *a*, *b* :: *b*, *c*, &
∺ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, deſignat
a, *b* :: *b*, *c* :: *c*, *d* :: *d*, *e* :: *e*, *f* :: *f*, *g*.

145. Quæ quantitates dicuntur in PROGRESSIONE GEOMETRICA.

146. Cujus hæc eſt proprietas *ſummam omnium terminorum, demto ultimo, ſe habere ad eandem ſummam, demto primo termino, ut primus terminus ad ſecundum* (140.).

147. *Ratio ex aliis Compoſita dicitur ſi hæ ſimul locum habeant.* Ex. gr. ſi *a* ſit dupla ipſius *b*, & *c* tripla *d*; ſi nunc *f* ſit & dupla & tripla *g*, id eſt, bis tripla, aut ter dupla, nempe ſextupla, erit Ratio hæc ultima compoſita, ex præcedentibus.

 148. *Ex-*

Digitized by Google

148. *Exponens Rationis compoſitæ eſt Productum Exponentium Rationum componentium.*

149. Unde deducimus *datis Rationibus*, ut *a*, ad *b*, & *c* ad *d*, *f* ad *g*, *quantitates detegi in Ratione compoſita ex his, ſi Antecedentia & Conſequentia multiplicentur*; Rationis *acf* ad *bdg* Exponens eſt $\frac{acf}{bdg}$, Productum trium Exponentium præcedentium Rationum $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{g}$.

150. *Ratio compoſita ex duabus Rationibus æqualibus, duplicata dicitur.*

151. *Triplicata Ratio eſt quæ componitur ex tribus Rationibus æqualibus, & ſic de cæteris.*

CAPUT VII.

Generalia de Problematibus.

PRoblemata ſunt Quæſtiones ſolvendæ (11.)

152. *SOLUTIO Problematis eſt* reſponſum ad quæſtionem, aut *determinatio quantitatum quæſitarum.*

Digitized by Google

153. Idem Problema varias ſæpe habet Solutiones, unde diſtinctio Problematum.

154. *Indeterminata ſunt quorum Solutiones innumeræ ſunt.*

Ex. gr. ſi quærantur duo Numeri quorum Productum ſit 24. Problema erit indeterminatum; quia non determinatur Solutionum numerus; ſi enim 24. per numerum quemcunque ad libitum dividamus, habebimus in Quotiente numerum, qui cum Diviſore Quæſtioni reſpondet.

155. *Determinata Problemata ſunt*, quæ *determinatum numerum Solutionum habent.*

156. *Illa quorum unica eſt Solutio unius dimenſionis dicuntur.*

Tale eſt hoc.

Quæruntur duo numeri quorum ſumma eſt 22. & differentia 6. Reſp. 14. & 8. & nulla alia datur Solutio.

157. *Duorum dimenſionum dicuntur Problemata quando Solutiones dantur duæ.* Ex. gr.

Quæritur numerus, cujus quadratum plus ſex, valeat ipſum numerum quæſitum, multiplicatum per 5. Reſp. 2. vel 3. & nulla datur Solutio alia.

158. *Trium dimenſionum eſt Problema* hoc.

Digitized by Google

Quæritur numerus quo multiplicato per 11., *ſi* Producto addatur Cubus *ipſius* numeri, ſumma valeat ſexies, Quadratum numeri quæſiti plus ſex. *Tres* hujus Problematis *ſunt Solutiones*, & numerus quicunque ex his 1. 2. 3. conditionibus Problematis ſatisfacit, & nullus alius.

159. Eodem modo altiores *dimenſiones ex numero Solutionum determinantur.*

De Problematibus unius & duarum dimenſionum tantum agam.

160. *Problemata omnia æquationibus ſolvuntur.*

161. Duæ *Quantitates æquales ſigno æqualitatis junctæ vocantur Æquatio.* Hæc tot dicitur dimenſionum, quot dimenſiones habet Poteſtas altiſſima incognitæ in hac ipſa.

162. Regulis, quas in capite ſequenti indicamus, Problemata determinata reducuntur ad unicam Æquationem, quæ unicam incognitam habet, vocatur hæc ÆQUATIO SOLITARIA.

163. In indeterminatis Problematibus Æquatio hæc ultima duas aut plures continet incognitas, quæ, unica excepta, adlibitum determinantur, ita ut unica incognita

Digitized by Google

ta tantum in Æquatione Solitaria ſuperſit.

164. In Æquatione Solitaria incognita a cognitis ita ſeparari debet, ut ſola detur illa in uno membro Æquationis, id eſt ad unam partem ſigni æqualitatis, dum in alio membro ſolæ cognitæ dantur. Vocatur hoc REDUCTIO Æquationis, ſi agatur de Æquatione unius dimenſionis, in aliis caſibus SOLUTIO Æquationis vocatur.

165. *Æquatio Solitaria tot habet dimenſiones* quot dimenſiones *aut Solutiones habet Problema:* ipſam Propoſitionem, & in quibus Caſibus exceptio detur, in ſequentibus demonſtabimus.

166. Quantum tamen ad Solutionem Problemata quædam, in quibus in Æquatione Solitaria incognita duas habet Dimenſiones, ad Problemata unius Dimenſionis, & alia in quibus incognita quatuor habet Dimenſiones, ad Problemata duarum Dimenſionum, referuntur.

167. Sit x incognita, dentur a & b, $xx + bb = dx$ eſt Æquatio duarum Dimenſionum, & duo valores ipſius x conditionibus hujus Æquationis ſatisfaciunt.

Sed $xx = ab$ ad Problemata unius Dimenſionis refertur, & ſimplici Extractionis Radicis detegitur valor ipſius x; nam

$x = \sqrt{ab}$. Problema autem quod ad hanc reducitur Æquationem $xx = ab$, duas tamen habere Solutiones clarum eſt; nam non modo habemus $x = \sqrt{ab}$; ſed & $x = -\sqrt{ab}$.

168. Problemata autem talia ad primam Dimenſionem referuntur, quia iiſdem regulis cum his ſolvuntur, & Caſus hic ſemper extat quando eadem quantitas affirmata & negata conditionibus Problematis reſpondet.

De Æquationibus quatuor Dimenſionum quæ ad duas referuntur agam in Capite X.

CAPUT VIII.

De Regulis quibus Problemata ſolvuntur.

169. R*Eductio Æquationis eſt ſeparatio quantitatis unius a reliquis ita, ut ſola in uno membro detur*; in quo caſu neceſſario valor ipſius, aliis quantitatibus expreſſa, in alio membro continetur.

Obſervandum autem æqualitatem non tolli multiplicatis, aut diviſis ambobus mem-

membris per eandem quantitatem, etiam additâ aut ſubtractâ utrimque eâdem quantitate.

170. Unde ſequitur, *quantitatem quamcunque ex uno membro in aliud mutato ſigno poſſe transferri.*

Tollendo utrimque quantitatem affirmatam, & contra addendo quantitatem negatam.

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM.

REGULA I.

171. *Si quantitas ſeparanda in Fractione detur per Denominatorem hujus integra Æquatio multiplicari debet.*

Quod etiam ad plures Fractiones applicari debet.

REGULA II.

172. *Omnes quantitates in quibus quantitas ſeparanda datur, in unum membrum colligendæ ſunt, tranſlatis omnibus aliis in membrum oppoſitum.*

Tranſlatio ut obſervavimus fit mutatis ſignis (170.).

Digitized by Google

REGULA III.

173. *Per quantitatem, aut ſimplicem aut compoſitam, quæ ſeparandam quantitatem multiplicat, membrum utrumque dividi debet.*

Hæ tres Regulæ in Æquationibus unius Dimenſionis de quibus hic agimus plerumque ſufficiunt, aliquando tamen hæc quarta uſu venit.

REGULA IV.

174. *Si ſeparanda quantitas ſigno radicali involuta ſit, ante omnia hoc tollendum eſt, ſeparando per Regulas præcedentes quantitatem, quæ ſigno radicali afficitur ab aliis ita, ut ſola in uno membro detur, & elevando utrumque membrum ad Poteſtatem, de cujus Radice agitur.*

REGULA V.

175. *Si non ipſa quantitas, ſed Poteſtas aliqua ipſius ſeparata fuit, ex utroque membro Radix hujus Poteſtatis extrahenda eſt.*

EXEM-

EXEMPLUM.

$$a+\frac{\sqrt{axx+fxx+d^3}}{\sqrt{g}}=b$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{axx+fxx+d^3}}{\sqrt{g}}=b-a\\[2ex]\dfrac{axx+fxx+d^3}{g}=bb-2ba+aa\end{array}\right\}\text{Reg. 4.}$$

$$axx+fxx+d^3=gbb-2gab+gaa.\quad\text{Reg. 1.}$$

$$axx+fxx=gbb-2gab+gaa-d^3.\quad\text{Reg. 2.}$$

$$xx=\frac{gbb-2gab+gaa-d^3.}{a+f}\quad\text{Reg. 3.}$$

$$x=\frac{\sqrt{gbb-2gab+gaa-d^3.}}{\sqrt{a+f}}\quad\text{Reg. 5.}$$

DE REDUCTIONE VARIARUM *Æquationum ad Unicam, aut de Quantitatum Exterminatione.*

REGULA VI.

176. *Duas Æquationes ad Unicam Reducimus cum unius quantitatis ſublatione, ſeparando per Regulas præcedentes hanc ita in una*

Digitized by Google

una Æquatione, ut Sola in uno membro detur, & ſubſtituendo valorem in alia Æquatione.

EXEMPLUM.

Dentur Æquationes

$$ax + dy = fg$$
$$afx + ddx = ffy.$$

Prima reducitur ad hanc

$$y = \frac{fg - ax}{d}$$

ſubſtituendo in ſecunda Æquatione pro y valorem $\frac{fg - ax}{d}$, habemus Æquationem hanc, in qua y non datur,

$$afx + ddx = \frac{f^3g - ffax}{d},$$

quæ ad hanc reducitur

$$dafx + d^3x = f^3g - ffax.$$

REGULA VII.

177. Etiam *tollitur quantitas conferendo ejuſdem valores duos.*

EXEMPLUM.

Sint eædem Æquationes

ax

$$ax + dy = fg$$
$$afx + ddx = ffy.$$

Separando y per Regulas Reductionis habemus

$$y = \frac{fg - ax}{d}$$
$$y = \frac{afx + ddx}{ff}$$

Ergo $\frac{afx + ddx}{ff} = \frac{fg - ax}{d}$.

quæ Æquatio multiplicatione per ffd dat eandem, quam per Regulam VI. habuimus.

$$dafx + d^3x = f^3g - ffax.$$

REGULA VIII.

178. *Quando plures dantur Æquationes utraque methodo Reg.* VI. *&* VII. *numerus Æquationum Unitate minuitur, & quantitas una tollitur.*

Per Reg. VI. Quærendo valorem quantitatis exterminandæ in una Æquatione, & ipſum in aliis loco ejuſdem quantitatis ſubſtituendo.

Per Reg. VII. Quærendo valorem ejuſdem quantitatis in omnibus Æquationibus in quibus datur, & hos valores conferendo.

RE-

Digitized by Google

REGULA IX.

179. *Minuendo iterum atque iterum Æquationes ſuperſtites, hac eâdem Methodo, tandem ad unicam perveniemus Æquationem.*

EXEMPLUM.

$x+y+z=a \qquad x=a-y-z$
$x+y+u=b$
$x+z+u=c$
$y+z+u=d$

$a-z+u=b \qquad z=a+u-b$
$a-y+u=c$
$y+z+u=d$

$a-y+u=c \qquad y=a+u-c$
$y+a+2u-b=d$

$2a+3u-c-b=d$

Applicationem Methodi ſecundæ huic eidem Exemplo adjicimus.

x

$x+y+z=a$	$x=a-y-z$
$x+y+u=b$	$x=b-y-u$
$x+z+u=c$	$x=c-z-u$
$y+z+u=d$	- - - - - - -

$a-z=b-u$	$z=a-b+u$
$a-y=c-u$	- - - - - - -
$y+z+u=d$	$z=d-y-u$

$a-b+u=d-y-u$	$y=d-2u-a+b$
$a-y=c-u$	$y=a-c+u$

$$d-2u-a+b=a-c+u.$$

Methodi expoſitæ locum tantum habere poſſunt, quando quantitates exterminandæ unicam tantum habent dimenſionem; adjiciam idcirco Regulas ſequentes duas.

REGULA X.

180. *Ex Æquationibus, in quibus exterminanda quantitas plures Dimenſiones habet, aliæ Æquationes formantur ex diverſis valoribus inter ſe comparatis altiſſimæ Poteſtatis quantitatis tollendæ.*

Hi valores, ope Regularum circa Reductiones traditarum eliciuntur.

REGULA XI.

181. *Quando vero Poteſtas altiſſima in duabus Æquationibus non eadem eſt, per quantitatem exterminandam, aut aliquam ejuſdem Poteſtatem, Æquatio una multiplicari debet.*

EXEMPLUM.

Quæruntur duæ Æquationes in quibus x non habetur, datis,

$$axx + byx = yyz.$$
$$dxx + fzx = aaz.$$
$$cxx + ddy = ffz.$$

$$xx = \frac{yyz - byx}{a}$$

$$xx = \frac{aaz - fzx}{d}$$

$$xx = \frac{ffz - ddy}{c}$$

Ex hiſce tribus valoribus quadrati xx, duas elicimus Æquationes

yyz

$$\frac{yyz - byx}{a} = \frac{aaz - fzx}{d}.$$

$$\frac{aaz - fzx}{d} = \frac{ffz - ddy}{e}.$$

Tertia enim, quæ ex his duabus formari poteſt, non pro nova Æquatione haberi debet.

Tribus tamen indigemus Æquationibus; quia duæ deſiderantur ſuperſtites poſt exterminatam quantitatem x.

Adhibitâ unâ ex his ultimis Æquationibus, quæro valorem xx, & ipſum comparo cum uno ex tribus præcedentibus valoribus.

Prima Æquatio ex duabus ultimis dat

$$x = \frac{dyyz - a^3z}{dby - afz}$$

Multiplicando per x Æquationem datur

$$xx = \frac{dyyzx - a^3zx}{dby - afz} = \frac{ffz - ddy}{e}.$$

Sublatis multiplicatione Fractionibus, habemus has tres Æquationes, ex quibus

Methodis explicatis (176. 177) tollitur x, ipſas adduas reducendo.

$$dyyz - dbyx = a^3z - afzx$$
$$ea^2z - efzx = dffz - d^3y.$$
$$edy^2zx - ea^3zx = dbf^2yz - d^3byy - af^3z^2 + afddzy$$

DE PROBLEMATUM SOLUTIONIBUS.

REGULA XII.

182. *Problema abſtractè conſiderandum eſt.*

Omnem Quæſtionem, quæ de quantitatibus peculiaribus proponi poteſt, & ad alias quantitates poſſe applicari, clarum eſt; ideoque & ſolutionem in aliis illis caſibus locum habere patet: hac de cauſa ex Quæſtione removendum omne quod in ſolutione non neceſſario conſiderari debet. Ex. gr. hæc proponitur Quæſtio.

Aliquis interrogatus quot annos haberet, reſpondet: ſi ex triplicato annorum numero ſubtraham ſedecim, numerus ſupra centum excreſcet, quantum infra centum ſubſiſtit annorum numerus.

In hoc Problemate non conſidero utrum quis interrogatus ſit nec ne; non quæro an agatur de annis, aut de aliis quantitatibus; ſed juxta hanc Regulam

1. re-

1. reduco Problema ad hoc.

Quæritur numerus ex cujus triplo ſi ſubtrahatur ſedecim, reliquum ſuperet centum, quantum centum excedit ipſum numerum quæſitum.

REGULA XIII.

183. *Quod aliundè notum eſt circa Quæſtionem, in ſubſidium vocandum.*

Exemplo illuſtrabo Regulam. Rex Syracuſius Hiero, Archimedem rogavit quantum argenti daretur permixtum in Corona aurea; Pertractari hæc & examinari quidem potuit; ſed integra ſervanda erat. Quis non videt ni quid aliunde in ſubſidium vocetur Problema ſolvi non poſſe. Sed volumen coronæ cum voluminibus ponderum æqualium Auri & Argenti comparavit, immergendo corpora hæc aquâ, & aquam effluentem, repleto ante immerſionem vaſe, menſurando. Ex notis voluminibus computationem inivit. Aliam ejuſdem Problematis ſolutionem damus. Vide Prob. 39.

REGULA XIV.

184. *Quantitates quæ in conditionibus*

Digitized by Google

Problematis memorantur, litteris exprimi debent.

Obſervandum magni uſus eſſe, quod ſuperius notavimus de diſtinctione litterarum, quibus cognitæ & incognitæ deſignantur (13.)

REGULA XV.

185. *Conditiones Problematis ad Æquationes revocandæ ſunt.*

Conditiones Problematis continent aut æqualitatem inter quantitates, id eſt, Æquationem; aut quantitatum relationes, ex quibus etiam Æquationes formantur (122. 134.)

Ut Problema ſit determinatum deſideratur determinatio omnium incognitarum, id eſt, tot requiruntur determinationes, quot dantur incognitæ. In ſingulis conditionibus unica continetur determinatio, & ſingulæ conditiones dant Æquationem: Ergo problema determinatum non eſt niſi tot dentur conditiones, ideoque Æquationes quot dantur incognitæ.

REGULA XVI.

186. *Regulis præcedentibus Æquationes ad So-*

Digitized by Google

Solitariam revocandæ ſunt; quæ ipſa reducenda aut ſolvenda eſt.

CAPUT IX.

De uſu Regularum in Problematibus unius Dimenſionis & vitandis difficultatibus quibuſdam, quæ in Solutionibus ſæpe occurrunt.

Explicatis Regulis, quibus veritas in Mathematicis detegitur, ipſarum uſus exemplis illuſtrari debet.

Cum etiam difficultates ſæpe occurrant, quarundam cauſas indicabo, & quomodo aliquando vitari poſſint dicam.

PROBLEMA I.

187. *Mercatores duo ſinguli æqualem ſummam expendunt, lucratur primus* 126 *fl. ſecundus amittit* 87 *fl. & eſt nunc ſumma primi dupla ſummæ ſecundi. Quær. ſumma, quam ſinguli expendere.*

Abſtracte ſi juxta Reg. 12. (182.) conſideretur Problema, ad hoc reducitur.

Detegere numerum cui ſi addatur 126., *ſi ex eodem numero primo tollatur* 87., *ſumma*

Additionis dapla ſit reſidui Subtractionis.

Dicatur x ſumma quæſita conditio Problematis eſt hæc $x + 126$. valet bis $x - 87$; ergo

$$x + 126 = 2x - 174.$$
$$300 = x.$$

Si autem univerſaliſſimam deſideremus ſolutionem, dicatur a lucrum, & b damnum.

$$x + a = 2x - 2b$$
$$a + 2b = x$$

Unde videmus quomodocunque mutetur lucrum, aut damnum, ſummam lucri & duplicati damni valere ſummam primam.

PROBLEMA 2.

188. *Operarius accepta mercede quinque ſeptimanarum cum florenis 6., continuat opus per ſeptimanas duas, percipit ſe tantum acceptæ pecuniæ quartam partem ſuperſtitem habere, accepta autem mercede duarum ultimarum ſeptimanarum numerat in repoſito florenos 21. Quæritur merces unius ſeptimanæ.*

Per Reg. 12. (182) Problema ad hoc reducitur. *Detegere numerum quo multiplicato per 5. & producto addito 6. ſummaque di-*

Digitized by Google

diviſa per 4. ſi quoto bis addatur ipſe numerus, aggregatum ſit 21.

Dicatur x numerus quæſitus, hoc multiplicato per 5. dat $5x$, addito 6. habemus $5x+6$, dividatur per 4, $\frac{5x+6}{4}$, addatur bis x, & ſumma valebit 21. id eſt

$$\frac{5x+6}{4}+2x=21.$$
$$5x+6+8x=84.$$
$$13x=78.$$
$$x=6.$$

PROBLEMA 3.

189. *Quinque ulnæ panni conſtant fl.* $17\frac{1}{2}$. *Qu. quantum conſtant ulnæ* 14.

Dicatur x pretium quæſitum; Clarum eſt 5. ſe habere ad 14., ut $17\frac{1}{2}$. ad numerum florenorum quæſitum: ergo.

$$5,\ 14 :: 17\tfrac{1}{2},\ x.$$
$$5x = 14 \times 17\tfrac{1}{2}.(134)$$
$$x=\frac{14 \times 17\frac{1}{2}.}{5}=49.$$

190. Ex hac ſolutione generalem ducimus regulam; *datis tribus terminis primis Proportionis geometricæ, quartum detegi, ſi ſecun-*

cundus per tertium multiplicetur, & Productum per primum dividatur. Quæ Regula, propter uſum ſuum maximum, aurea dicta fuit, etiam vocatur Regula trium, aut Regula Proportionum.

PROBLEMA 4.

191. *Mercator mutuam accepit pecuniam & pollicitus eſt uſuras 5. per annum ad centum. QU. quantum debeat pro uſuris poſt ſeptem menſes, ſi acceperit ſummam 665.*

Clarum eſt uſuras ſequi rationem temporis, ut & ſummæ, id eſt uſuræ ſunt in ratione compoſita ex his. Idcirco

Quæritur numerus qui ſit ad 5, in ratione compoſita ſeptem menſium ad duodecim menſes, id eſt in ratione 7 ad 12, & in ratione 665 ad 100. Ergo ſi x ſint uſuræ quæſitæ,

$$12 \times 100, 7 \times 665 :: 5, x$$

$$x = \frac{5 \times 7 \times 665}{12 \times 100} = 19\tfrac{19}{48}.$$

PROBLEMA 5.

192. *Mercatores tres in ſocietate lucrati ſunt 1560. flor. Primus contulerat 2000. flor. &*

Digitized by Google

& poſt annum nummos recuperavit, ſecundus contulit 660. fl. per ſeptem menſes, & tertius 1255. per menſes quinque. Dividendum eſt lucrum.

Manifeſtum eſt lucrum pro ratione temporis & pecuniæ collatæ dividendum eſſe; idcirco problema ad hoc reducitur.

Dividere 1560. in tres partes quæ ſint inter ſe ut $2000 \times 12, 660 \times 7, 1255 \times 5$,

Sint partes hæ x, y, z. Habemus duos ordines quantitatum, quarum illæ, quæ in primo ordine ſunt, ſequuntur rationem illarum quæ ſecundum ordinem formant. Habemus præterea ſummas utriuſque ordinis; nam $x+y+z = 1560$. &

$$2000 \times 12 + 660 \times 7 + 1255 \times 5 = 34895.$$

Ergo (141.)

$$34895, 1560 :: \begin{cases} 2000 \times 12 = 24000, x \\ 660 \times 7 = 4620, y \\ 1255 \times 5 = 6275, z \end{cases}.$$

Et tribus regulis proportionum incognitæ determinantur.

PROBLEMA 6.

193. *Dato primo ſecundo & ultimo termino Progreſſionis geometricæ; Quæritur ſumma.*

Sit

Digitized by Google

Sit a terminus primus; b ſecundus; d ultimus; x ſumma: habemus

$$a, b :: x - d, x - a \text{ (146).}$$
$$bx - bd = ax - aa.$$
$$x = \frac{bd - aa.}{b - a.}$$

PROBLEMA. 7.

194. *Summa annorum Johannis, Jacobi, Petri, & Pauli eſt* 98 *annorum. Anni Pauli habentur, ſi ex ſumma annorum Petri & Johannis tollamus undecim. Anni Pauli, demtis annis Jacobi, additis tribus, æquant Annos Petri. Tandem anni Johannis tribus deficiunt a ſemiſſe ſummæ annorum Petri & Pauli. QU. Quot annos ſinguli vixerint.*

Sit u numerns annorum Johannis; x Jacobi; y Petri; z Pauli.

Conditiones Problematis abſtractè conſideratæ, & Algebraice expreſſæ dant æquationes has

$$u + x + y + z = 98.$$
$$u + y - 11. = z.$$
$$z - x + 3. = y. \quad x = z - y + 3.$$
$$y + z = 2u + 6.$$

$u + 2z = 95.$
$u + y - 11. = z. \quad y = z - u + 11.$
$y + z = 2u + 6.$

$u + 2z = 95. \quad 2z = 95 - u$
$2z + 5. = 3u.$

$100. = 4u. \quad u = 25.$

Ergo

$2z = 95 - u = 70. \quad \& \ z = 35.$
$y = z - u + 11 = 21.$
$x = z - y + 3 = 17.$

OBSERVATIO I.

195. Sæpe autem Æquationes Problematis ad unicam facilius reducuntur quàm Methodis n. 178. & 179. Sed cum hoc pendeat a peculiari Æquationum relatione, quæ in infinitum variari poteſt, faciliores, aut magis ſimplices & elegantiores, Problematum ſolutiones, quæ a peculiari hac relatione pendent, ad regulas fixas revocari non poſſunt. Notare tamen debemus Additione aut Subtractione duarum Æquationum ſæpe formari Æquationem ſimpliciorem; ad quam in multis occaſionibus etiam pervenimus, ſi valores duos ejusdem quantitatis compoſitæ inter ſe conferamus; ſæpe hiſ-

hiſce ſolis operationibus incognitæ quædam exterminantur, ut in exemplis duobus ſequentibus.

PROBLEMA 8.

196. *Duæ quæruntur quantitates quarum ſumma & differentia dantur.*

Sint quantitates x & y; ſumma dicatur a differentia b. Æquationes ſunt

$$x+y=a$$
$$x-y=b$$

Additis Æquationibus habemus

$$2x=a+b$$

Subtracta ſecunda ex prima datur

$$2y=a-b$$

PROBLEMA 9.

197. *Trianguli rectanguli datur Peripheria* 80; *& area* 240. *Qu. Hypotenuſa.*

Sint latera x, y, z; Hypotenuſa eſt x; Æquationes datæ ſunt

$$x+y+z=80.$$
$$yz=480.$$

Quibus quia de Triangulo rectangulo agitur addenda hæc tertia eſt,

$$yy+zz=xx.$$

Si

Digitized by Google

Si Æquatio ſecunda multiplicetur per 2. & tertiæ addatur habemus

$$yy + 2yz + zz = xx + 960$$

Prima Æquatio dat

$$y + z = 80 - x$$

Quadrata membrorum ſunt æqualia

$$yy + 2yz + zz = 6400 - 160x + xx$$

Ergo

$$xx + 960 = 6400 - 160x + xx$$

$$160x = 5440$$

$$x = 34.$$

OBSERVATIO. 2

198. Sæpe operationes longæ & difficiles vitari poſſunt, quærendo non ipſas quantitates, quæ deſiderantur, ſed alias quarum ope illæ deteguntur.

Hoc in omnibus illis occaſionibus locum habet in quibus duæ incognitæ eodem modo ſeſe habent in omnibus Æquationibus in quibus dantur.

Ex. gr. Quæruntur duo numeri quorum ſumma ſit a & Productum b. Si numeri dicantur x & y, Æquationes probl. ſunt

$$z + u = a$$

$$zu = b$$

Cla-

Clarum eſt, in hiſce Æquationibus *z* non magis deſignare majorem numerum quam minorem, ideo duplicem in ſolutione neceſſario habebit valorem. Eodem modo ſi dato Producto etiam ſumma detur quadratorum, & in innumeris aliis problematibus. In hiſce omnibus occaſionibus, quamvis problema unicam tantum habeat ſolutionem ad hanc non poſſumus pervenire niſi problema duarum dimenſionum ſolvatur.

199. In omnibus tamen occaſionibus in quibus ex hac ſola cauſa problema ad duas dimenſiones adſcendit, ut plerumque quando Æquationes non admodum ſunt compoſitæ, problema ad unicam dimenſionem revocatur, quærendo ſummam & differentiam illarum incognitarum quæ eandem relationem habent, quibus datis ipſas quantitates dari vidimus (196.). Incidimus tamen ſemper in caſum n.166.; quantum ad incognitam quæ differentiam exprimit; quia in cognitæ valorem poſſunt habere negativum, ſed neceſſario hic æqualis eſt poſitivo.

Si Ex. gr. ſumma duarum quantitatum dicatur $2x$ & differentia $2y$: major quantitas erit $x+y$ & minor $x-y$, ſi y ſit quantitas po-

poſitiva; contrarium obtinet ſi y ſit quantitas negativa. Ponamus $x = 7$ & $y = 3$ tunc $x + y = 10$ & $x - y = 4$ ſed ſi $y = -3$ erit $x + y = 4$ & $x - y = 10$; Ergo in ſolutione problematis y habet duos valores 3. & − 3. ſed agitur de eadem quantitata affirmate & negata; ergo de n. (166.)

Eodem modo aliquando x habebit duos valores, qui eâdem quantitate affirmatâ & negatâ exprimuntur, ſi eædem quantitates & negatæ conditionibus problematis ſatisfaciant. Ut in problemate hoc:

Datis duorum numerorum Producto & ſumma quadratorum Qu. numeri.

In hoc problemate ſi numeri dicantur u & z, cùm u non magis unum numerum exprimat quam alium, habet u in ſolutione valores duos diverſos, quos eoſdem valores negativos habet, quare poſt ſolutionem problematis duarum dimenſionum adhucdum verſemur in caſu n. (166.) in quem, ſolutione problematis unius dimenſionis, incidimus, ſi quantitas una dicatur $x + y$, & alia $x - y$.

PROBLEMA 10.

200. *Quæruntur quantitates duæ quarum*

Digitized by Google

Summa & Productum datur.

Sit ſumma data $2a$; Productum b; differentia ſit $2y$.

Quantitates quæſitæ ſunt $a+y$ & $a-y$ (199) quarum Productum eſt $aa-yy$.

$$b=aa-yy$$
$$yy=aa-b$$
$$y=\sqrt{aa-b}$$

PROBLEMA II.

201. *Quæruntur quantitates duæ quarum Productum, & ſumma Quadratorum datur.*

Sit Productum $2a$ & ſumma Quadratorum $4b$.

Dicantur quantitates $x+y$; $x-y$. Productum eſt $xx-yy$; quadrata ſunt $xx+2xy+yy$ & $xx-2xy+yy$. Ergo

$$xx-yy=2a.$$
$$xx+yy=2b.$$

Additis Æquationibus, & ſubtractâ primâ ex ſecundâ, habemus.

$$2xx=2a+2b$$
$$2yy=2b-2a$$
$$x=\sqrt{a+b}$$
$$y=\sqrt{a-b}$$

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA 12.

202. *Quæruntur tres quantitates in continua Proportione, quarum ſumma & ſumma Quadratorum datur.*

Summa quantitatum eſt a; ſumma Quadratorum b.

Sint quantitates $\div s,\ u,\ z$.

Conditiones ſunt

$$s + u + z = a.$$

$$ss + uu + zz = b.$$

$sz = uu$, propter continuam Proportionem

In hiſce s & z eodem modo reperiuntur in omnibus Æquationibus, ideo ut ad unicam Dimenſionem revocemus Problema, dicuntur hæ $x + y = s$ & $x - y = z$ (199.), & hæc eſt Proportio quæſita,

$$\div x + y,\ u,\ x - y.$$

Et Æquationes ſunt

1ª. $2x + u = a$.

2ª. $2xx + 2yy + uu = b$.

3ª. $xx - yy = uu$.

Si in ſecunda Æquatione pro uu ſcribatur ipſius valor, habemus

$$3xx + yy = b.$$

Addita æquatione tertia

$$4xx = b + uu$$

in 1ª. $2x = a - u$

Idcirco $4xx = aa - 2au + uu = b + uu$

$$aa - 2au = b$$

$$u = \frac{aa - b}{2a} = \frac{1}{2}a - \frac{b}{2a}$$

Ergo in 1ª. $2x = a - u = a - \frac{aa + b}{2a}$

$$x = \frac{aa + b}{4a} = \frac{1}{4}a + \frac{b}{4a}$$

in 3ª. $yy = xx - uu = \frac{a^4 + 2aab + bb}{16aa} - \frac{a^4 + aab - bb}{4aa}$

$$yy = \tfrac{10}{16}b - \tfrac{3}{16}aa - \frac{3bb}{16aa}$$

$$y = \tfrac{1}{4}\sqrt{10b - 3aa - \frac{3bb}{aa}}$$

OBSERVATIO 3.

203. Magna difficultas in ſolutione Problematum ſæpe occurrit, quæ ſpectat formationem Æquationum ex conditionibus datis.

Notavimus quidem ſupra (185.) omnem conditionem Problematis dare Æquationem, ſed ſæpiſſime æqualitates, aut relationes, quæ Æquationes formare debent, non exprimuntur, quamvis in ipſis conditioni-

nibus contineantur.

203. In hoc caſu examinandum an non aliæ in Problemate conſiderentur quantitates, ſive cognitæ, ſive incognitæ, quæ in ipſo Problemate non exprimitur; ſi tales dentur litteris deſignari debent & harum ope Æquationes formari, exprimendo incognitarum inter ſe, aut cum cognitis relationes.

204. Si tales non dentur, aut non ſufficiant, examinandum an cognitæ, aut incognitæ, memoratæ in Problemate, non partes habeant, quarum relationes inter ſe, aut cum aliis quantitatibus, ex conditionibus Problematis elici poſſunt. Si dentur, partes hæ, ſive cognitæ, ſive incognitæ, litteris exprimendæ ſunt, & ex relationibus Æquationes formari debent.

PROBLEMA 13.

205. *Pes cubicus aquæ marinæ ponderat* a; *pes cubicus aquæ pluviæ* c *pondo eſt; tandem pes cubicus aquæ alius ſalſæ pondus habet* b, *medium inter* a *&* c. *Qu. Pondus aquæ pluviæ addendæ pedi cubico aquæ marinæ ut mixta æque ſalſa ſit cum ultimum memorata.*

Sit Pondus quæſitum x. Notandum vo-

Digitized by Google

lumen memorari aquæ marinæ, quæ in permixtione adhibenda eſt, nempe pedem cubicum; quod volumen etiam memoratur ubi determinantur pondera. Percipio etiam ejuſdem aquæ volumina eſſe inter ſe ut pondera.

Ut ergo faciliusad Æquationes perveniam dico z volumen aquæ pluviæ cujus pondus eſt x; voco etiam p pedem cubicum.

Habeo nunc, cum de aqua pluvia agatur,

$$p, z :: c, x.$$

Quia aquæ permixtæ pes cubicus ponderat b, datur eadem ratio inter volumen p & integrum volumen $p + z$ mixturæ, quæ datur inter pondus b & integrum pondus $a + x$ ejuſdem mixturæ.

$$p, p + z :: b, a + x.$$

Unde duæ formantur Æquationes quibus Problema ſolvitur.

Poſſunt etiam hæ duæ proportiones ad unicam reduci, & Problema ad regulam Proportionum, ſi attendamus ex ultima Proportione hanc deduci (136.),

$$p, z :: b, a - b + x,$$

Quæ cum prima collata dat

$$c, x :: b, a - b + x.$$

Al-

Altern. Invert. & Divid. habemus (136.)
$b - c, c :: a - b, x.$

PROBLEMA 14.

206. *Tria dantur prata, æque bona,* a, b, c, *in quibus herba uniformiter accreſcit; boves* d, *in tempore* e, *depaſcunt pratum* a; *boves* f, *in tempore* g, *depaſcunt pratum* b. *Qu. quot boves depaſcent pratum* c, *in tempore* h.

Sint boves quæſiti x.

Conditiones Problematis non exprimunt relationes, ex quibus Æquationes formari poſſunt; ſed quia agitur de herba quæ eſt in pratis, dum boves ipſa intrant, & de herba accreſcente, diſtinguo boves pro ſingulis pratis in duas partes.

Pono $d = y + z$; boves qui primam herbam depaſcunt ſunt y, & qui herbam accreſcentem depaſcunt, dum creſcit, dicuntur z. Eodem modo pono $f = t + u$; & $x = s + r$.

Quo majus eſt pratum, eo major, cæteris paribus, eſt numerus boum. Sed quo majus eſt tempus, eo minor numerus boum deſideratur, ſi de eodem gramine agatur. Ergo, ſepoſitâ herbâ accreſcente,

boves ſunt inter ſe directe ut prata, & inverſe ut tempora: id eſt, y, t, s, ſunt inter ſe directe ut a, b, c, & inverſe ut e, g, h.

Boves qui depaſcunt herbam accreſcentem, dum accreſcit, ſunt inter ſe ut prata, & tempus non conſiderandum eſt; id eſt z, u, r, ſunt inter ſe ut a, b, c.

Hiſce poſitis formatio Æquationum & ſolutio facilis eſt.

$$d = y + z, \quad \frac{a}{e}, \quad a$$

$$f = t + u, \quad \frac{b}{g}, \quad b$$

$$x = s + r, \quad \frac{c}{h}, \quad c$$

$$\frac{a}{e}, \frac{b}{g} :: y, \; t = \frac{eby}{ag}$$

$$\frac{a}{e}, \frac{c}{h} :: y, \; s = \frac{ecy}{ab}$$

$$a, b :: z, \; u = \frac{bz}{a}$$

$$a, c :: z, \; r = \frac{cz}{a}$$

Septem nunc dantur Æquationes cum ſe-

Digitized by Google

ſeptem incognitis: Subſtitutis in ſecunda & tertia pro t, s, u, r, valoribus quæ in quatuor ultimis habentur, hæ tres Æquationes ſuperſunt

$$d = y + z \qquad y = d - z$$
$$agf = eby + gbz$$
$$abx = ecy + bcz$$

$$agf = ebd - ebz + gbz \qquad z = \frac{egf - bbd}{gb - eb}$$

$$abx = ecd - ecz + bcz \qquad z = \frac{abx - ecd}{bc - ec}$$

$$\frac{agf - ebd}{gb - eb} = \frac{abx - ecd}{bc - ec}$$

$$x = \frac{acgfb - acgfe - bcedb + gbecd}{abbg - abbe}$$

OBSERVATIO 4.

207. Aliquando contingit conditiones, quibus Problema determinatur, quidem continere Æquationes, ſed in variis Æquationibus non incognitas dari. In tali caſu Æquationes uſum in exterminatione incognitarum non habent, & ſolutioni inſervire nequeunt.

In his occaſionibus ante omnia ex Æqa-

Digitized by Google

tionibus datis novæ formandæ ſunt, quibus operationes memoratæ (176. & ſeq.) applicari poſſunt; Æquationes ex datis neceſſario elici poſſunt, ſi, ut ponimus, contineant Problematis determinationem.

PROBLEMA 15.

208. *Ex variis Mixtis datis novum determinatum componere Mixtum.*

Dentur mixta tria ex auro, argento & cupro; quantitas auri in primo eſt a, in ſecundo b, in tertio c; quantitas argenti in primo eſt d, in ſecundo e, in tertio f; quantitas cupri in primo eſt g, in ſecundo h in tertio i. Componendum eſt mixtum in quibus aurum eſt l, argentum m, & cuprum n. Determinandum quantum ex ſingulis mixtis ſumendum.

Dicatur aurum A; argentum B; cuprum C; mixtum primum M; ſecundum N; tertium O; quantitas quæſita primi mixti x; ſecundi mixti y; tertii mixti z.

Etiam, ut ſimpliciores ſint Æquationes, pono

$$a + d + g = o$$
$$b + e + h = p$$
$$c + f + i = q$$

Conditiones Problematis in Æquationibus ſequentibus continentur

$$aA + dB + gC = oM$$
$$bA + eB + hC = pN$$
$$cA + fB + iC = qO$$
$$lA + mB + nC = xM + yN + zO$$

Sola Æquatio ultima incognitas continet, aliæ ergo ſolutioni inſervire nequeunt, niſi ex his novæ formentur.

Eo potero pervenire, ſi ad hoc attendam, lA valere aurum quod datur in tota mixtura, ideſt, in xM, in yN, & in zO; quod aurum & aliter poſſet exprimi, ſi non M, N, & O, in ſecundæ membro æquationis darentur ſed A, B, C.

Subſtituo ideo in quarta Æquatione pro M, N, & O, valores, quos ex tribus primis deduco, in quibus A, B, & C. habentur; & comparo Aurum, Argentum Cuprum in primo membro cum eodem metallo in ſecundo, unde pro tribus incognitis tres formo Æquationes.

Tres primæ Æquationes dant

$$\frac{aA+dB+gC}{o}=M$$

$$\frac{bA+eB+hC}{p}=N$$

$$\frac{cA+fB+iC}{q}=O$$

Et ultima mutatur in hanc

$$lA+mB+nC=\frac{xaA+xdB+xgC}{o}+\frac{ybA+yeB+yhC}{p}+\frac{zcA+zfB+ziC}{q}$$

Ex qua hæ tres eliciuntur,

$$l=\frac{xa}{o}+\frac{yb}{p}+\frac{zc}{q},\ x=\frac{opql-yboq-zcop}{apq}$$

$$m=\frac{xd}{o}+\frac{ye}{p}+\frac{zf}{q},\ x=\frac{opqm-yeoq-zfop}{dpq}$$

$$n=\frac{xg}{o}+\frac{yh}{p}+\frac{zi}{q},\ x=\frac{opqn-yhoq-ziop}{gpq}$$

Hi tres valores incognitæ x duas dant Æquationes, quæ ſimpliciores ſunt, ſi ſingulæ per pq multiplicentur & dividantur per o.

$$\frac{pql-ybq-zcp}{a}=\frac{pqm-yeq-zfp}{d}$$

$$\frac{pql-ybq-zcp}{a}=\frac{pqn-yhq-zip}{g}$$

y =

$$= \frac{dpql - apqm + zafp - zdcp}{dbq - aeq}$$

$$y = \frac{gpql - apqn + zaip - zgcp}{gbq - abq}$$

Multiplicatis his valoribus per q, & ivifis per p, habemus

$$\frac{ql - aqm + zaf - zdc}{db - ae} = \frac{gql - aqn + zai - zgc}{gb - ah},$$

$$= \frac{abmq - aenq + dbnq - dhlq + gelq - gbmq}{abf - aei + dbi - dhc + gec - gbf}$$

Habetur y, ſi in valore ipſius z, pro q cribatur p; pro c, b; pro f, e; & pro , h.

Sed ſi pro q ponamus o; pro c, a; pro , d; pro i, g; detegimus x. Si enim ttente valorem ipſius z examinemus, haud ifficulter percipimus ſolas quantitates q, , f, i diſtinguere valorem z a valoribus & x cum quantitates a, d, g, b, e, h, odem modo ſeſe habeant in valore memoato.

CA-

CAPUT X.

De Naturâ & ſolutione Æquationum duarum Dimenſionum.

Problema Duarum dimenſionum duas habet ſolutiones (157.), & incognita duos valores; in Æquatione ergo ſolitaria, quæ ſolutionem Problematis continet, non potius unum valorem habet incognita quam alium; idcirco utrumque ſimul.

209. Ut naturam nunc determinemus Æquationum, in quibus eadem littera duas quantitates diverſas deſignat, inquirendum in formationem talis Æquationis.

210. Quod ut fiat conſiderandum omnes quantitates in Æquatione ad eandem partem ſigni æqualitatis poſſe transferri. Æquatio hæc $xx + 6 = 5x$, tranſlatione $5x$ in hanc mutatur $xx - 5x + 6 = 0$.

211. In hoc caſu ſi pro x ponamus valorem ipſius, quantitates Æquationis ſeſe mutuo deſtruent, quia æquales ſunt 0.

Demonſtrandum ergo quomodo formetur Æquatio, cujus termini omnes, ſi ponantur ad eandem partem ſigni æqualitatis;

Digitized by Google

tis, ſeſe mutuo deſtruant, ſubſtitutione alterutrius duarum quantitatum.

212. Sit $x = a$ & $x = b$, ut hos valores unica Æquatione comprehendam, pono $x - a = 0$ & $x - b = 0$. Multiplicatione nova formatur Æquatio,

$$\begin{array}{r} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ \hline -bx + ba \\ + xx - ax \quad \\ \hline xx - bx + ba = 0 \\ -ax \qquad\quad \end{array}$$

Si in hac Æquatione pro x ponam a aut b termini ſeſe mutuo deſtruent.

Ut hoc demonſtretur obſervandum non intereſſe, utrum poſt multiplicationem in Producto pro x ponam valorem an ante multiplicationem in quantitatibus quæ multiplicantur: clarum etiam eſt, ſeſe mutuo deſtruere quantitates Producti cujuſcunque formati multiplicatione per eandem quantitatem affirmatam & negatam, per $+ a - a$ aut $+ b - b$; tollitur enim quantitas quæ per o. multiplicatur.

Si nunc in ambabus quantitatibus $x - a$ & $x - b$ pro x ponamus a aut b & deinde multiplicemus $b - a$ per $b - b$, aut $a - b$ per

Digitized by Google

$a - a$, in utroque caſu quantitates Producti ſeſe mutuo deſtruent; ergo & in ipſa Æquatione.

213. Valor incognitæ vocatur RADIX *Æquationis*; & Æquationem duarum Dimenſionum duas habere radices clarum eſt.

214. Cùm autem quantitas negativa etiam litterâ deſignari poſſit, Radix aliquando negativa eſt; poſſunt ergo extare caſus quatuor.

1. Ambæ radices ſunt affirmatæ; 2. Una affirmata altera negata eſt, affirmatâ ſuperante negatam. 3. Negata ſuperat affirmatam. 4. Ambæ negatæ ſunt.

Ut formas Æquationum determinem in hiſce quatuor caſibus pono a ſuperare b & $a + b = d$, & $a - b = c$, habeoque haſce quatuor formulas.

$x = a$	$x = a$
$x = b$	$x = -b$
$x - a = 0$	$x - a = 0$
$x - b = 0$	$x + b = 0$
$xx - ax + ab = 0$	$xx - ax - ab = 0$
$\quad - bx$	$\quad + bx$
$xx - dx + ab = 0$	$xx - cx - ab = 0$

x

$$\begin{array}{ll}
x = -a & \qquad x = -a \\
x = b & \qquad x = -b \\
\hline
x + a = 0 & \qquad x + a = 0 \\
x - b = 0 & \qquad x + b = 0 \\
\hline
xx + ax - ab = 0 & \qquad xx + ax + ab = 0 \\
\quad\; - bx & \qquad\quad\;\; + bx \\
xx + cx - ab = 0 & \qquad xx + dx + ab = 0
\end{array}$$

215. Videmus quomodo, data Æquatione quacunque, poſſimus ex ſolis ſignis determinare, an radices ambæ ſint affirmativæ, an negativæ, an una affirmativa altera negata, & majorem ex his a minore diſtinguere.

216. Liquet etiam in omni Æquatione duarum Dimenſionum, in qua Quadratum incognitæ ab omnibus cognitis eſt ſeparatum, & quæ ad unam partem ſigni Æqualitatis tota datur, quæ etiam diſpoſita eſt juxta dimenſiones incognitæ, incognitam in ſecundo termino multiplicari per ſummam Radicum mutato ſigno, ut & terminum ultimum continere Productum Radicum ſervato ſigno.

Quantitas cognita quæ ſecundum terminum multiplicat dicitur COEFICIENS ſecundi termini.

Digitized by Google

DE SOLUTIONE ÆQUATIONUM DUARUM DIMENSIONUM.

Regula qua ex data Æquatione Radices extrahuntur eſt hæc.

217. *Poſitâ cognitâ ſolâ ad partem unam ſigni Æqualitatis, utrimque addatur quadratum dimidii Coeficientis ſecundi termini, & extrahatur Radix quadrata ex utroque membro.*

Totum artificium regulæ hoc eſt, formatur ex membro Æquationis in quo incognita datur Quadratum cujus Radix exacte poteſt extrahi.

EXEMPLUM.

$$xx - dx + ab = 0$$
$$xx - dx = - ab$$
$$xx - dx + \tfrac{1}{4}dd = \tfrac{1}{4}dd - ab$$
$$\left.\begin{array}{l} x - \tfrac{1}{2}d \\ \tfrac{1}{2}d - x \end{array}\right\} = \sqrt{\tfrac{1}{4}dd - ab}$$
$$x = \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}d + \sqrt{\tfrac{1}{4}dd - ab} \\ \tfrac{1}{2}d - \sqrt{\tfrac{1}{4}dd - ab} \end{array}\right.$$

Clarum eſt ambas haſce radices eſſe poſitivas nam $\sqrt{\tfrac{1}{4}dd - ab}$ ſemper minor eſt $\tfrac{1}{2}d$.

Digitized by Google

218. Etiam liquet radices Æquationis eſſe impoſſibiles quando *ab* ſuperat $\frac{1}{4}dd$, tunc enim $\frac{1}{4}dd-ab$ eſt quantitas negativa, quæ Radicem quadratam habere non poteſt (46.)

De Problematibus quæ ad Æquationes duarum Dimenſionum conducunt.

Superius quædam de his Problematibus indicavimus (165.).

219. Extra omne dubium eſt in omni Problemate, quod duas habet ſolutiones, has contineri in Æquatione duarum Dimenſionum (209. 212.).

220. Etiam neceſſario in talem incidimus Æquationem, quando Problema quidem unicam tantum habet quam quærimus ſolutionem, ſed quando negata quædam quantitas, de qua minime ſoliciti ſumus, etiam conditionibus ſatisfacit; nam non potius ad poſitivam ſolutionem, quam ad hanc aliam, nos conducit Algebra; utramque ergo detegimus; ſed Radicem negativam in hoc caſu negligimus.

221. Si problema duas tantum habeat ſolutiones negativas, quas non quæri-

mus, perveniemus ad Æquationem duarum Dimenſionum quamvis quantitas nulla propoſito noſtro ſatisfaciat.

222. Poſſumus etiam in Problemate omnino impoſſibili pervenire ad ſimilem Æquationem. Impoſſibilem quantitatem algebraice poſſe exprimi vidimus (218.) Si tales quantitates conditionibus Problematis algebraice expreſſis ſatisfaciant, ad Æquationem cujus Radices impoſſibiles ſunt perveniemus.

223. Caſus peculiaris datur notatu dignus; in hoc Problema unicam tantum habet ſolutionem poſitivam, ipſius tamen ſolutio conducit ad Æquationem quæ duas habet radices poſitivas.

Contingit hoc quando problema præter ſolutionem poſitivam & aliam negativam habet, ſed quantitas negata illa non eſt quæ habetur in Æquatione memorata.

224. Ex. C. unicam quidem ſolutionem poſitivam habet Problema hoc; *Quæritur proportio continua, cujus primus terminus eſt* 4. *& differentia tertii & ſecundi* 3. ſolutio poſitiva hæc eſt. ∺ 4, 6, 9. Sed & datur præterea alia hæc negativa ∺ 4, − 2, 1, quam non quærimus, ſed ad quam tamen Ælgebra nos conducit.

225.

225. Si ſecundum terminum dicamus *y* & tertium *x*. Clarum eſt quando quæritur *y*, duos hoſce valores 6, & − 2. dari, quorum negativus rejicitur. Sed ſi quæramus *x* habebimus valores 9. & 1. quorum ultimus rejiciendus eſt, quia pertinet ad Proportionem, in qua datur terminus negativus, quam non quærimus.

226. *Si dato primo termino* 4. *Proportionis continuæ, ſumma ſecundi & tertii termini eſt* 3. Ubi *tertius terminus quæritur*, eaſdem quantitates poſitivas detegimus 9 & 1. Sed nunc 9 rejici debet, qui pertinet ad proportionem quæ habet terminum negativum; ſunt enim proportiones ∺ 4, 2, 1, & ∺ 4, − 6, 9,

227. In ſolutione utriuſque Problematis, ſi tertius terminus dicatur *x*, & hic quæratur, habemus hanc Æquationem $xx - 10x + 9 = 0$, ita ut unum Problema non poſſit ſolvi, quin & aliud ſolvamus; utraque tamen ſolutio Mathematice loquendo ad utrumque Problema pertinet, ſaltem ad Problema algebraice enuntiatum.

228. In ſolutione hujus Æquationis $xx - 10x + 9 = 0$ diſtinguimus Radicem

G 3 ſer-

ſervandam a rejicienda, ſi ad operationes, quibus ad Æquationem hanc pervenimus, attendamus. Hæc Æquatio ut ſolvatur in hanc mutatur

$$xx - 10x + 25. = 16 \; (217.)$$

Extractis Radicibus quadratis habemus

$$x - 5 = 4.$$
$$5 - x = 4.$$

229. Prima ex his Æquationibus ſervanda eſt, ſi in operationibus formatum fuit quadratum quantitatis x affirmatæ, ut hoc fit quando ſolvitur Problema n. 224.

230. Secunda contra uſu veniet, ſi ut in ſolutione Problematis n. 226. Quadratum fuit formatum quantitatis ex qua x ſubtracta fuit: nam in hoc ultimo caſu in Æquatione non eſt xx Quadratum Radicis $+x$, ſed Radicis $-x$, & Radix $+x$ pertinet ad caſum de quo non ſolliciti ſumus, quamvis rem abſtractius conſiderando ad ſolutionem Problematis pertineat.

231. In iis autem occaſionibus in quibus operationes non determinant utrum Quadratum incognitæ habeat Radicem affirmativam an negativam, utraque Radix Æquationis duarum Dimenſionum ſolutionem dat Problematis; quod duas tunc ſo-

ſolutiones habet poſitivas.

232. Dixi ſuperius (166.), aliquando Problemata quatuor Dimenſionum ad duas reduci; quia nempe ut Problema duarum Dimenſionum ſolvuntur.

233. Caſus hic ſemper contingit ſi eædem duæ quantitates affirmatæ, & negatæ Problemati ſatisfaciant, Ex. gr. Si $+a, -a, +b, -b$ reſpondeant conditionibus Problematis, quatuor habet Problema ſolutiones. Æquatio qua ſolvitur ad quatuor Dimenſiones adſcendit; ſed quæ per regulas traditas pro Æquationibus duarum dimenſionum ſolvitur, quærendo non incognitæ ipſius valorem, ſed valorem quadrati hujus.

Clarum enim eſt in hoc exemplo ſi x dicatur quantitas quæſita, $x = +a$ & $x = -a$ hac ſola Æquatione exprimi $xx = aa$; & eodem modo $xx = bb$ demonſtrat $x = b$ & $x = -b$.

Multiplicatis nunc Æquationibus

$$xx - aa = 0$$
$$xx - bb = 0$$

Æquatio $\begin{array}{l} x^4 - aaxx + aabb = 0 \\ \quad\;\; - bbxx \end{array}$ continebit quatuor valores ipſius x (212.) qui, data hac

Æquatione, deteguntur per regulas ſuperius traditas (217.); quærendo primo valores duos quadrati xx, & ex his Radices extrahendo.

234. Aliquando tamen incidimus in talem Æquationem, quamvis Problema unicam tantum habeat ſolutionem affirmativam, & æqualem negativam. Tunc quadratum incognitæ duos quidem habet valores, ſed negativus eſt alter qui rejiciendus eſt (218.)

Algebra neceſſario dat omnes algebraicas ſolutiones, cum verò impoſſibiles quantitates algebraice exprimantur ſi hæ conditionibus Problematis reſpondeant, neceſſario ſolutiones tales Æquatione, quæ valores exprimit incognitæ, continentur.

235. Caſus etiam datur analogus cum caſu memorato in n. 223. & in Problemate quod unicam habet ſolutionem affirmativam & huic æqualem negativam alteram, aliquando incognita quatuor habet valores veros, ſed horum duo ad caſus impoſſibiles pertinent, quamvis ipſi valores impoſſibiles non ſint.

Ex-

Digitized by Google

EXEMPLUM.

236. Quæruntur x, y, z, poſitis his tribus proportionibus,

$$\div\!\!\cdot\!\cdot\; x,\; y,\; z$$
$$\div\!\!\cdot\!\cdot\; z-y,\; 20,\; z+y$$
$$\div\!\!\cdot\!\cdot\; 34-2y,\; z-x,\; 34+2y.$$

Problema hoc unicam habet affirmativam ſolutionem, nempe $x=9$, $y=15$, $z=25$, qui numeri ſi omnes negativi fuerint etiam proportiones dant memoratas; id eſt $x=-9$, $y=-15$, $z=-25$, nullaque alia ſolutio hujus Problematis datur: ſi autem quæram z habeo Æquationem hanc

$$z^4-689zz+40000=0$$

Quæ hos quatuor dat valores z,

$$z=25.$$
$$z=-25.$$
$$z=8.$$
$$z=-8.$$

Qui duo ultimi valores ad ſolutiones pertinent impoſſibiles, in quibus

$$x=-42;\; y=\sqrt{-336};\; z=8.$$

aut

$$x=42;\; y=-\sqrt{-336};\; z=-8.$$

237. Diſtinguendus autem eſt valor hic

$z = 25$ ab omnibus reliquis, qui rejiciendi ſunt, hac methodo

Solutione Æquationis (217.)

$$z^4 - 689zz + 40000 = 0$$

detego

$$\left.\begin{matrix} zz - 344\tfrac{1}{2} \\ 344\tfrac{1}{2} - zz \end{matrix}\right\} = 280\tfrac{1}{2}.$$

Seligo valorem in prima Æquatione detectum, rejecto alio juxta regulam ſuperius traditam (229, 230.) quia in operationibus, quibus ad Æquationem ſolitariam perveni, formavi quadratum $zz - 20$. & z^4 formatum fuit multiplicando $+ zz$ per ſe ipſum non $- zz$. Ubi nunc habeo $zz = 625$ detego $z = 25$ & $z = -25$ quem ultimum valorem rejicio quia negativus eſt.

238. Problemata ſæpiſſime quæ unicam tantum, aut duas ſolutiones, habent, non poſſunt reſolvi niſi Æquationibus trium aut quatuor dimenſionum aut etiam altioribus, ſed in hiſce caſibus Problemata ſtricte loquendo tot habent ſolutiones quot dimenſiones Æquationes habent, quarum ſolutiones quædam rejiciuntur.

CA-

CAPUT XI.

Problemata duarum Dimenſionum.

PAuca tantum hic Problemata proponam. Illa quæ in capite præcedenti explicata ſunt, illis quæ antea de Problematibus in genere tradita ſunt addi tantum debent, & ſolutio Problematum duarum dimenſionum non difficilis erit.

PROBLEMA 16.

239. A *&* B *ſimul debent* 208. A *ſingulis diebus perſolvit* 9. B *Primo die ſolvit* 1., *Secundo* 2., *Tertio* 3. *&c. Qu. quot diebus integrum debitum perſolvant & quantum quiſque debeat.*

Sit debitum A, x; debitum B, y; numerus dierum z.

$$x + y = 208.$$

$$9z = x.$$

y valet ſummam progreſſionis Arithmeticæ cujus primus terminus eſt 1. ultimus z. numerus terminorum z; quæ ſumma valet $\overline{1 + z} \times \frac{1}{2}z$ (126.) Ergo

$$\tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}zz = y$$

Quæ

Quæ tres Æquationes ad hanc unicam reducuntur, additis duabus ultimis & collatione facta cum prima.

$$x + y = \tfrac{1}{2}zz + 9\tfrac{1}{2}z = 208.$$

$$zz + 19z = 416.$$

$$zz + 19z + 90\tfrac{1}{4} = 506\tfrac{1}{4}.$$

$$z + 9\tfrac{1}{2} = 22\tfrac{1}{2}.$$

$$z = 13.$$

$$x = 117.$$

$$y = 91.$$

PROBLEMA 17.

240. *Quidam emit equum quem rurſus divendit pro* a; *lucratur ad centum quantum ipſi conſtitit equum. Qu. quantum ipſi conſtiterit.*

Sit x pretium equi.

$$100,\ 100 + x :: x,\ a.$$

PROBLEM 18.

241. *Quæruntur duo, numeri quorum productum eſt* 12; *& differentia Quadratorum* 7.

Sint

Sint numeri x & y.

$$xy = 12., \; y = \frac{12}{x}, yy = \frac{144}{xx}..$$

$$xx - yy = 7., \; xx - \frac{144}{xx} = 7..$$

$$x^4 - 144 = 7xx$$

Solvitur hæc Æquatio, ut Æquatio duarum Dimenſionum (217.), ſi quæramus valorem quadrati xx.

$$x^4 - 7xx = 144.$$
$$x^4 - 7xx + 12\tfrac{1}{4} = 156\tfrac{1}{4}.$$
$$\left.\begin{array}{l} xx - 3\tfrac{1}{2} \\ 3\tfrac{1}{2} - xx \end{array}\right\} = 12\tfrac{1}{2}.$$
$$xx = \begin{cases} +16. \\ -9. \end{cases}$$
$$x = 4. \quad y = 3.$$

Secundum valorem $xx = -9$ negligo quia impoſſibilis eſt (218.).

Neceſſario detego valorem quadrati xx in ſolutione Problematis quia non modo $x = 4$, $y = 3$, Problema ſolvunt, ſed & $x = -4$, $y = -3$.

Duos etiam alios valores quadrati xx detego; quia Problema duos præterea habet ſolutiones impoſſibiles, quæ algebraice exprimi poſſunt. Sunt hæ $x = \sqrt{-9}$, $y = \sqrt{-16}$; & $x = -\sqrt{9}$, $y = -\sqrt{-16}$.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA 19.

242. *Quæritur numerus, cui ſi addatur radix quadrata ipſius numeri multiplicati per decem ſumma valeat viginti.*

Sit numerus x.

$$x + \sqrt{10x} = 20$$
$$\sqrt{10x} = 20 - x$$
$$10x = 400 - 40x + xx$$
$$xx - 50x = -400$$
$$xx - 50x + 625 = 225$$
$$\left.\begin{array}{r} x - 25 \\ 25 - x \end{array}\right\} = 15$$
$$x = 40$$
$$x = 10$$

Clarum eſt valorem primum qui ſuperat 20. non quæri, ſecundum ergo tantum ſervo.

Mathematice tamen loquendo 40. reſpondet quæſtioni; nam multiplicato hoc numero per decem habemus 400., cujus radix quadrata -20 ſi addatur 40, ſumma 40. $-$ 20. valebit 20.

Obſervandum $25 - x = 15$ non $x - 25 = 15$ dare radicem quam quærimus; quia quadratum $20 - x$ fuit formatum, (230.).

OB-

OBSERVATIO 5.

243. Notavimus ſupra (198.) ambages in ſolutione vitari ſæpiſſime, ſi non ipſæ quærantur quantitates deſideratæ, ſed aliæ quarum opē ad deſideratas pervenimus, regulamque quæ in multis occaſionibus uſu venit explicavimus (199): Sed hiſce nunc addendum ipſas operationes aliquando indicare quantitates, quæ ipſis propoſitis facilius deteguntur, & quæ ad quæſitas conducunt, quod exemplo clarius patebit.

PROBLEMA 20.

244. *Datâ ſummâ & ſummâ Quadratorum, quatuor numerorum in Progreſſione Geometricâ, detegere numeros.*

Sit ſumma numerorum a; ſumma Quadratorum b.

Dicantur numeri $\div\!\!: u, x, y, z$.

Æquationes ſunt,

$$u + x + y + z = a$$
$$uu + xx + yy + zz = b$$

$$xx = yu \qquad u = \frac{xx}{y}$$

$$yy = zx \qquad z = \frac{yy}{x}$$

Qua-

Quatuor hæ Æquationes ad has duas reducuntur

$$\frac{xx}{y} + x + y + \frac{yy}{x} = a.$$

$$\frac{x^4}{yy} + xx + yy + \frac{y^4}{xx} = b.$$

Sublatis Fractionibus habemus

$$x^3 + x^2y + yyx + y^3 = axy.$$

$$x^6 + x^4y^2 + y^4x^2 + y^6 = bxxyy.$$

In quibus x & y eodem modo ſeſe habent; quare potius quæro ſummam & differentiam harum quantitatum (199.). Sed cum percipiam inita computatione operoſam admodum hanc futuram, antequam ulterius pergam, ad Æquationes, in quibus x & y eodem modo ſe habent, redeo & has perpendo, ut ſi poſſibile ſit ex ipſis eliciam quantitates, quæ facilius detegi queant & ex quibus datis, x & y inveſtigari poſſint.

Æquationes memoratæ ita poſſunt exprimi

$$\overline{xx + yy} \times \overline{x + y} = axy.$$

$$\overline{x^4 + y^4} \times xx + yy = bxxyy.$$

Quæ

Quæ in has mutantur

$$xx + yy = \frac{axy}{x+y}$$

$$x^4 + y^4 = \frac{bxxyy}{xx+yy}$$

Quæ ultima, ſubſtituendo pro $xx+yy$ valorem, mutatur in hanc

$$x^4 + y^4 = \frac{bxy \times \overline{x+y}}{a}.$$

Ut Æquationem ſimpliciorem habeam, formo quadrata membrorum primæ,

$$x^4 + y^4 + 2yyxx = \frac{aaxxyy}{\overline{x+y}^2}$$

& habeo

$$x^4 + y^4 = \frac{\overline{axy}^2}{\overline{x+y}^2} - 2\overline{xy}^2 = \frac{bxy \times \overline{x+y}}{a}$$

Quam Æquationem iterum ſimpliciorem futuram video, ſi pro xy incognitam unam ponam & aliam pro $x+y$; id eſt ſi ſummam & Productum incognitarum quæram, quibus datis ipſæ incognitæ facile determinantur (200.)

Examinandum nunc an aliam Æquationem detegere poſſim, quæ etiam ſimplicior evadat ſimili mutatione; duæ enim

Digitized by Google

Æquationes deſiderantur, ut duas inco-gnitas determinemus.

Datur Æquatio hæc

$$xx + yy = \frac{axy}{x+y}.$$

Additis utrimque $2xy$, mutatur in hanc,

$$\overline{x+y}^2 = \frac{axy}{x+y} + 2xy$$

Ponamus nunc $xy = ss$ & $x+y = t$; facta ſubſtitutione dantur hæ duæ Æquationes

$$tt = \frac{as}{t} + 2s.$$

$$\frac{aass}{tt} - 2ss = \frac{bst}{a}.$$

Quæ in has mutantur

$$t^3 = as + 2st.$$

$$a^3s - 2atts = bt^3,\ t^3 = \frac{a^3s - 2atts}{b}.$$

Unde $$as + 2st = \frac{a^3s - 2atts}{b}.$$

$$ba + 2bt = a^3 - 2att.$$

$$tt + \frac{b}{a}t = \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}b.$$

Qua

Qua Æquatione ſolutâ, datur t; ideoque s, nam

$$s = \frac{t^3}{a + 2t}$$

Deteguntur etiam x & y.

$$x = \tfrac{1}{2}t \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}tt - s}.$$

$$y = \tfrac{1}{2}t \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}tt - s}.$$

CAPUT XII.

De Problematibus indeterminatis.

PRoblemata indeterminata, ut determinata reſolvi ſuperius notavimus (163.).

Dantur autem indeterminata Problemata, in quibus quamvis plures ſint incognitæ quàm Æquationes, nulla tamen ad libitum poteſt adſumi.

Talia ſunt omnia Problemata, in quibus quantitates Quadratis aut Cubis æquari debent.

In his quantitates aliæ quædam ad libitum adſumuntur & ex his indeterminatæ Problematis determinantur.

Ubi quantitas, cujus conditiones determinantur, Quadrato aut Cubo æquari de-

Digitized by Google

bet, totum artificium in eo ſitum eſt, ut quantitas, quæ Quadrato æquari debet, Algebraice exprimatur & Quadrato æqualis ponatur; & quidem tali, quo Æquatio hæc reducatur ad unam dimenſionem reſpectu incognitæ Problematis.

Quamdiu agitur de Problematibus unius & duarum dimenſionum, ſequentes Regulæ ſufficiunt in iis caſibus, in quibus Problemata univerſaliter ſolvi poſſunt. Quando hiſce regulis ad ſolutionem pervenire non poſſumus, Problema tantum in caſu peculiari ex proprietate numerorum, qui in Problemate exprimuntur, poſſibile eſt: de hiſce non agam; quia hic non perpendo ſingulares peculiarium numerorum proprietates.

REGULA I.

245. *Quando determinanda quantitas unicam dimenſionem habet, ad libitum Radix Quadrati adſumitur.*

EXEMPLA.

ax æquari debet Quadrato, & x eſt quantitas determinanda. Sumto ad libitum nu-

Digitized by Google

numero v; pono $ax = vv$ & poteſt determinari x.

Eodem modo x determinari poteſt in Æquationibus his

$$b + ax = vv$$
$$b + cx + ax = vv.$$

REGULA II.

246. *Quando determinanda quantitas duas habet dimenſiones, ſed Quadratum affirmatur & per unitatem tantum multiplicatur, Radix Quadrati eſt differentia inter numerum ad libitum ſumtum, & ipſam quantitatem determinandam.*

EXEMPLA.

Sit $a + xx$ quantitas, quæ Quadrato æquari debet, & x quantitas determinanda; v numerus ad libitum: Radix Quadrati eſt $v - x$ & habemus Æquationem

$$a + xx = vv - 2vx + xx$$
$$a = vv - 2vx$$

In qua x determinari poteſt.

Eodem modo poterit determinari x, ſi habeamus

Digitized by Google

$$a - bx + xx = vv - 2vx + xx$$
$$a - bx = vv - 2vx$$

REGULA III.

247. *Quando Quadratum quantitatis determinandæ ſubtrahitur in quantitate propoſita, aut quando multiplicatur hoc per aliam quantitatem, Problema univerſaliter ſolubile non eſt, niſi in caſibus in quibus quantitas, quæ Quadrato æquari debet, conſtat ex Quadrato & quantitatibus in quibus quantitas determinanda datur; tunc Radix Quadrati quæſiti eſt differentia Producti quantitatis determinandæ per numerum ad libitum ſumtum, & Radicis Quadrati quod datur in quantitate propoſita.*

EXEMPLA

$aa - xx$ æquari debet Quadrato, x eſt determinanda quantitas; v ad libitum ſumitur & Radix Quadrati quæſiti eſt $vx - a$.

$$aa - xx = vvxx - 2avx + aa$$
$$-x = vvx - 2av,$$

in qua Æquatione x determinari poteſt. Eodem modo in hac Æquatione,

$$aa + dx + exx = vvxx - 2avx + aa$$
$$d + ex = vvx - 2av$$

248.

248. Obſervandum o. pro Quadrato haberi poſſe, Regula ergo & huic quantitati applicari poteſt $dx + exx$ & Radix Quadrati quæſiti erit vx.

249. Obſervandum ulterius ad hanc tertiam Regulam poſſe revocari quantitates, in quibus ex variis Quadratis junctis ſubtrahitur Quadratum quantitatis determinandæ, ut in hac quantitate $aa + bb - xx$, in qua determinanda quantitas eſt x.

Ponimus $x = z - b$; ergo $xx = zz - 2zb + bb$ & propoſita quantitas in hanc mutatur $aa + 2zb - zz$, quæ ad tertiam Regulam pertinet; detecto valore z ſi ex hoc ſubtrahatur b, habemus x.

250. Regulæ memoratæ etiam applicari poſſunt quantitatibus quæ fractiones continent; ſit talis quantitas $aa + \frac{bx - dxx}{c}$, reducitur hæc ad hanc $\frac{aacc + bcx - dcx^2}{cc}$ (70.67.) quæ Quadrato æqualis fiet ſi numerator Quadrato æquatur.

251. Quando variæ quantitates Quadratis æquari debent, una ſeligitur, hæc Quadrato æquatur, & adhibito valore determinandæ quantitatis exterminatur hæc ex aliis

quantitatibus, & in hiſce uſu veniunt Regulæ quæ in aliis Problematibus locum habent, ut hoc in Problematibus capitis ſequentis patebit.

CAPUT XIII.

Problemata indeterminata.

PROBLEMA 21.

252. *Detegere duo Quadrata quorum differentia datur.*

Sit differentia data a, & Quadrata quæſita xx & yy.

$$a = xx - yy$$
$$a + yy = xx$$

Id eſt $a + yy$ Quadrato æquari debet. Adſumto v ad libitum, per Reg. 2 (246.) habemus

$$x = v - y$$
$$a + yy = yy - 2vy + vv$$
$$2vy = vv - a$$
$$y = \frac{vv - a}{2v}$$
$$x = \frac{vv + a}{2v}.$$

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA 22.

253. *Quadratum datum in duo Quadrata reſolvere.*

Sit Quadratum datum aa; Quadrata quæſita xx, yy.

$$aa = xx + yy$$
$$aa - yy = xx$$

Ergo $aa - yy$ Quadrato æquari debet, nunc ſumto v ad libitum habemus per 3. Reg. (247),

$$x = vy - a$$
$$aa - yy = vvyy - 2avy + aa$$
$$- y = vvy - 2av$$
$$y = \frac{2av}{vv + 1}$$
$$x = \frac{avv - a}{vv + 1}$$

PROBLEMA. 23.

254. *Summam duorum Quadratorum datorum in duo alia Quadrata reſolvere.*

Sint Quadrata data aa, bb; Quadrata quæſita xx, yy.

$$aa + bb = xx + yy$$
$$aa + bb - yy = xx$$

ergo $aa+bb-yy$ Quadrato æquari debet, quem caſum ad Reg. 3. revocari poſſe demonſtravimus (249). pono

$$y = z - b$$
$$yy = zz - 2zb + bb$$

Idcirco

$$aa + 2zb - zz = xx$$

Per 3. Reg. (247.) Si v ad libitum ſumatur

$$x = vz - a.$$
$$aa + 2zb - zz = vvzz - 2avz + aa$$
$$2b - z = vvz - 2av$$
$$\frac{2b+2av}{vv+1} = z$$
$$y = \frac{b+2av-bvv}{vv+1}$$
$$x = \frac{2bv+avv-a}{vv+1}$$

PROBLEMA 24.

255. *Invenire numerum qui ex duobus numeris datis ſeorſim ſubtractus relinquit Quadrata.*

Numeri dati ſunt a, b; numerus quæſitus eſt x; & Quadrata in Problemate memorata yy, zz.

$$a - x = yy \qquad x = a - yy$$
$$b - x = zz$$

$$b - a + yy = zz$$

Ergo $b - a + yy$ Quadrato æquari debet. Sumto numero v ad libitum per Reg. 2. (246.).

$$v - y = z$$
$$b - a + yy = vv - 2vy + yy$$
$$b - a = vv - 2vy$$
$$y = \tfrac{1}{2} v + \frac{a - b}{2v}$$

$$x = \tfrac{1}{2} a + \tfrac{1}{2} b - \tfrac{1}{4} vv - \frac{\overline{a-b}^2}{\overline{2v}^2}$$

PROBLEMA 25.

256. *Invenire duos numeros quorum ſi unus addatur Quadrato alius, ſumma ſit Quadratum.*

Sint numeri quæſiti x & y; Quadrata in Problemate memorata uu, zz.

$$xx + y = uu$$
$$yy + x = zz$$

In prima Æquatione $xx + y$ Quadrato æquari debet, & valor quantitatis x in ſecunda Æquatione pro x ſubſtitui debet.

Si

Digitized by Google

Si t ad libitum ſumatur

$$u = t - x \quad (246.)$$

$$xx + y = tt - 2tx + xx$$

$$x = \frac{tt - y}{2t}$$

$$yy + x = yy + \frac{tt - y}{2t} = zz$$

$$4ttyy + 2t^3 - 2ty = 4ttzz \quad (250.)$$

Sumatur s ad libitum, & per 3. Reg. (247.)

$$2tz = 2ty - s$$

$$4ttyy + 2t^3 - 2ty = 4ttyy - 4tsy + ss$$

$$2t^3 - 2ty = -4tsy + ss$$

$$y = \frac{ss - 2t^3}{4ts - 2t}$$

$$x = \frac{4t^3s - ss}{8tts - 4tt}$$

PROBLEMA 26.

257. *Invenire tres numeros quorum ſumma ſit Quadratum, & ut bini juncti faciant Quadratum.*

Sint numeri quæſiti x, y, z; Quadrata in Problemate memorata rr, ss, tt, vv.

$$x+y=rr.\quad y=rr-x\ (245.)$$
$$x+z=ss.$$
$$y+z=tt.$$
$$x+y+z=vv.$$

$$x+z=ss.\quad x=ss-z\ (245.)$$
$$rr-x+z=tt.$$
$$rr+z=vv.$$

$$rr-ss+2z=tt.$$
$$rr+z=vv.\qquad z=vv-rr\ (245.)$$

Seligo ſecundam ex his Æquationibus quia ſimplicior eſt, & prima in hanc mutatur,

$$2vv-rr-ss=tt$$

Quadrato nunc æquari debet $2vv-rr-ss$, quæ ad ſecundum Reg. referri poſſi per explicata in n. 249. tollamus vv, ponendo

$$r=q-v$$
$$2vv-rr-ss=vv-qq+2qv-ss=tt$$

Nunc cum v numerus ſit indeterminatus, adſumto q ad libitum quæro v; quæ operatio ad Reg. 2. (246.) pertinet, adſumto ergo p, pono

$$t=p-v$$
$$vv-qq+2qv-ss=pp-2pv+vv$$
$$v=\frac{pp+qq+ss}{2q+2p}$$

De-

Digitized by Google

Determinatis ad libitum p, q, s, datur v, ergo & r; nam $r = q - v$; idcirco etiam deteguntur x, y, z; habemus enim

$$z = vv - rr$$
$$x = ss - z$$
$$y = rr - x$$

aut

$$z = vv - rr$$
$$x = ss + rr - vv$$
$$y = vv - ss$$

PROBLEMA 27.

258. *Invenire tria Quadrata in Proportione continua arithmetica.*

Sit xx Quadratum primum; y differentia terminorum vicinorum in progreſſione,

$$xx$$
$$xx + y$$
$$xx + 2y$$

Sunt tria Quadrata; id eſt duæ ultimæ quantitates Quadratis æquari debent; ſint hæc uu, zz,

$$xx + y = uu \qquad uu - xx = y$$
$$xx + 2y = zz$$

$$2uu - xx = zz$$

Æquatio hæc ad tertiam Regulam revo-

vocari poteſt (249.) ſi ponamus

$$x = t - u$$

$$2uu - xx = uu - tt + 2tu = zz$$

Cui Æquationi quærendo t tertiam Regulam poſſumus applicare; ſed quia etiam indeterminata eſt u, ad 2. Reg. (246.) refero quantitatem & pono

$$z = u - s$$

$$uu - tt + 2tu = ss - 2su + uu$$

$$u = \frac{ss + tt}{2s + 2t}$$

Si nunc ad libitum ſumantur s & t, datur u; & ideo x, quia $x = t - u$; quibus datis Radices trium Quadratorum notæ ſunt, nempe x, u, $s - u$, aut

$$\frac{2st + tt - ss}{2s + 2t}, \frac{ss + tt}{2s + 2t}, \frac{2st + ss - tt}{2s + 2t},$$

Communis Denominator negligi poteſt in hoc caſu.

In hac ſolutione demonſtravi, Problema hoc reſolvi poſſe ſine ullo artificio peculiari per Regulas ante traditas; minui autem operatio poteſt adſumtis his quantitatibus, quæ ſunt in progreſſione arithmetica,

Digitized by Google

$$tt + uu - 2tu.$$
$$tt + uu.$$
$$tt + uu + 2tu.$$

Prima & ultima ſunt Quadrata quorum Radices ſunt $t - u$, $t + u$; ſola media ergo Quadrato æquari debet & pertinet ad Reg. 2. (246.) ergo

$$tt + uu = ss - 2su + uu$$
$$u = \frac{ss - tt}{2s}.$$

Sumtis s & t ad libitum datur u, & notæ ſunt Radices tres $t - u$, $s - u$, $t + v$

$$\frac{2st + tt - ss}{2s}, \frac{ss + tt}{2s}, \frac{2st + ss - tt}{2s}.$$

CAPUT XIV.

De Problematibus Geometricis, & horum Conſtructione.

259. IN ſolutione Problematum Geometricorum, ante omnia figura delineanda eſt, in qua Problema ſolutum ponitur. In hac lineæ ducendæ ſunt, quibus, quantum fieri poteſt, triangula ſimilia, aut rectangula, aut figuræ aliæ, quarum proprietates nobis notæ ſunt; formentur. 260.

Digitized by Google

260. Lineæ litteris deſignari debent, diſtinguendo lineas cognitas & incognitas (13.). Relationes ex notis figurarum proprietatibus exprimendæ ſunt; & ex his Æquationes formandæ; dein ut in aliis Problematibus operandum.

261. Solutiones Geometricorum Problematum ſunt aut Arithmeticæ aut Geometricæ.

262. Arithmeticæ ſunt ſolutiones, quando relationes cognitarum linearum numeris exprimuntur, in quibus Problematibus incognitæ etiam numeris exprimuntur, & computatio non differt ab illis quas ſuperius vidimus.

263. Ubi de Geometricis ſolutionibus agitur lineæ cognitæ dantur in plano ductæ, & incognitæ in ipſo plano duci & determinari debent; hæcque determinatio vocatur Problematis conſtructio.

264. Lineæ ut aliæ quantitates ſunt affirmativæ & negativæ.

Sit A B linea, cujus principium ſit A, id eſt quæ augeri aut minui debet in extremitate B; ſubtrahatur B C major ipsâ AB, erit A C exceſſus; ſed in ſubtractione majoris quantitatis ex minori exceſſus eſt negativus; ergo AC eſt linea negativa; & in TAB. I. fig. 2.

linea indefinita D E punctum A ſeparat affirmativas lineas, quæ ad partem D dantur, a negativis quæ E verſus ſumendæ ſunt.

265. Simili methodo demonſtramus lineam pro prima haberi poſſe, & omnes, quæ ad unam partem hujus ductæ erunt, affirmativas eſſe, reliquas negativas.

TAB. I. fig. 3. Si A B ſit hæc linea prima, quæ ſuperficiem affirmativam ad partem D à negativa ad partem E ſeparat, omnium linearum FCG, HCI, KCL, MNO, PQR, &c. partes C G, CI, CL, N O, QR, ſunt affirmativæ lineæ, negativæ ſunt CF, CH, CK, NM, QP.

266. Conſtructio Problematis eſt conſtructio Æquationis ſolitariæ qua Problema ipſum ſolvitur.

Ut autem Æquationes hæ conſtruantur, Problemata quædam ſimpliciora in Elementis Euclidis tradita indicanda erunt.

EX PRIMO LIBRO.

267. *PROP.* 9. *Angulum rectilineum datum in duas partes æquales ſecare.*

268. *PROP.* 11. *In dato puncto lineæ rectæ ad hanc perpendicularem ducere.*

269. *PROP.* 12. *Idem ſi datum punctum ex-*

Digitized by Google

extra lineam fuerit.

270. *PROP.* 23. *Angulum rectilineum æqualem angulo dato rectilineo formare.*

271. *PROP.* 31. *Lineæ datæ per punctum datum parallelam ducere.*

272. *PROP.* 36. *Dato latere formare Quadratum.*

Ex Libro 3°.

273. *PROP.* 1. *Dati circuli centrum inveſtigare.*

274. *PROP.* 17. *Ex dato puncto ad datum circulum tangentem ducere.*

Ex Libro 6to.

275. *PROP.* 10. *Datam lineam non ſectam ſecare ut ſectam.*

276. Sumtis ad libitum partibus æqualibus in linea quacunque *poterit* hac propoſitione *linea alia in quot libuerit partes æquales ſecari.*

277. *PROP.* 11. *Datis duabus lineis tertiam proportionalem invenire.*

278. *PROP.* 12. *Datis tribus lineis quartam proportionalem detegere.*

279. *PROP.* 13. *Datis duabus lineis mediam proportionalem invenire.*

Hiſce Problematibus ſequentia ſunt addenda:

280. *PROBL. Invenire latus Quadrati æqualis duobus Quadratis datis.*

Duorum Quadratorum datorum latera ad angulos rectos jungenda ſunt (268.) ut formetur triangulum rectangulum, cujus hypotenuſa eſt linea quæſita. *Vide* 47. *prop. libr*: 1. *El.*

TAB. I. fig. 4. Quadratum lineæ AB, valet ſummam Quadratorum AC & BC.

281. *PROBL. Invenire latus Quadrati quod æquale ſit differentiæ duorum Quadratorum datorum.*

Sint latera data AB & DE,

TAB. I. fig. 5. Latus majoris Quadrati in duas partes æquales ſecandum eſt in C (276.) ut ſemicirculus deſcribatur cujus latus hoc ſit diameter; Ex B in ſemicirculo applicanda eſt chorda BF æqualis DE erit FA linea quæſita. *Vide.* 31. *prop. lib.* III. *ut &* 47. *prop. lib.* I. *El.*

Auxilio memoratorum Problematum Æquationes unius dimenſionis, ut & duarum dimenſionum, ſi ſolutæ fuerint (217.), ſatis facile conſtruuntur.

Cum vero duarum dimenſionum Æquationum ſolutio pro conſtructione non ſit ne-

neceſſaria dicam quomodo ſingulæ formulæ conſtruantur

282. Detur Æquatio hæc.

$$xx + ax - bb = 0$$

aut

$$xx - ax - bb = 0$$

Sit AB $= b$ erigatur in A per pendicularis AC æqualis $\frac{1}{2}a$; centro C radio CA deſcribatur circulus; ſi CB ducta fuerit, erunt BE, BD, radices quæſitæ; quarum altera negativa eſt (215.): in primo caſu negativa eſt BE, in ſecundo BD. TAB. I. fig. 6.

DEMONSTRATIO.

Dicimus in primo caſu BE $= -x$ ergo BC $= -x - \frac{1}{2}a$ cujus Quadratum valet Quadrata CA & AB ideſt $\frac{1}{4}aa + bb$, Ergo $xx + ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + bb$; unde $xx + ax - bb = 0$.

In eodem caſu dicimus BD $= x$ ergo CB $= x + \frac{1}{2}a$ & iterum $xx + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + bb$; id eſt $xx + ax - bb = 0$.

Si ponamus BD $= -x$ & EB $= x$ ſimili ratiocinio in utroque caſu pervenimus ad formulam hanc $xx - ax - bb = 0$.

283. Dentur nunc

$$xx + ax + bb = 0$$

aut

$$xx - ax + bb = 0$$

Digitized by Google

TAB. I. fig. 7. Sit iterum $AB = b$; perpendicularis ad hanc $AC = \frac{1}{2} a$; & centro C radio CA circulus deſcriptus; ſi in B ad BA erigatur perpendicularis quæ circulum ſecat in D & E erunt BD & BE radices quæſitæ, quæ in prima ex his formulis ambæ ſunt negativæ, in ſecunda ambæ affirmativæ (215.).

DEMONSTRATIO

Ductis Dd, Ee, parallelis ad AB, ſunt æquales Ae, BE, ut & Ad, BD, & ſunt proportionales Ae, eE, eF; & Ad, dD, dF: id eſt pro prima formula $\div -x, b, a+x$. pro ſecunda $\div x, b, a-x$, unde ipſæ Æquationes formularum deducuntur.

CAPUT XV.

Problemata Geometrica.

PROBLEMA 28.

284. *IN dato triangulo inſcribere Quadratum.*

TAB. I. fig. 8. Sit triangulum datum ACB; Quadratum deſcribendum EFHG; & a vertice

ce C ad AB ſit ducta perpendicularis CD. Sint nunc

$$AD = a$$
$$AB = b$$
$$CD = d$$
$$AF = y$$
$$FE = x$$

In triangulis ſimilibus AFE, ADC, AF (y), FE (x) :: AD (a), DC (d).

$$ax = yd$$

In triangulis BHG, BDC, ſimilibus BH = BA-AF-FE($b-y-x$), HG = FE(x) :: BD($b-a$), DC(d).

$$bx - ax = db - dy - dx$$

Ponendo pro dy valorem ax, habemus

$$bx + dx = db,$$
$$b+d, b :: d, x \ (135.).$$

Detecta x (278.) ſi in perpendiculari DC ipſi æqualis ſumatur DI, & per punctum I ad baſim parallela ducatur, determinabit hæc puncta E & G.

PROBLEMA 29.

285. *Sit* AB *diameter ſemicirculi cujus* centrum C; D, E, *puncta duo ab hoc æquidiſtantia, Quær. punctum* F *in circumferentia, a quo ſi ductæ fuerint lineæ* FD, FE, *radius ſit media Proportionalis inter* TAB. I. fig. 9.

 ſum-

Digitized by Google

ſummam & differentiam harum linearum.

Concipiamus ex F perpendicularem FG ad diametrum, & ſit

$$DC = CE = a$$
$$FC = b$$
$$FD = x$$
$$FE = y$$
$$CG = z$$

Conditio Problematis eſt hæc

$$\div\!\!\!\cdot\; x + y,\; b,\; x - y$$

ergo

$$1^a.\quad bb = xx - yy$$

In triangulo FDC dat 11. lib. 11. El.

$$2^{dam}.\quad xx = aa + bb + 2az$$

In triangulo FCE dat 12. lib. 11. El.

$$3^{am}.\quad yy = aa + bb - 2az$$

Subtractâ Æquatione 3ª. ex 2ª. datur

$$xx - yy = 4az$$

Unde propter 1ªᵐ. Æquationem deducimus

$$bb = 4az.$$
$$\div\!\!\!\cdot\; 4a,\; b,\; z.$$

Detecta linea z (277), datur punctum G, ex quo ſi perpendicularis ad AB erigatur determinatur F.

OB-

OBSERVATIO 6.

286. In hoc Problemate quærimus z, non autem x aut y, quia lineæ CG valor unicus eſt, non autem aliarum linearum. De x ſola agam, eſt hæc major ex lineis x & y, & licet ex puncto D unica talis linea major duci queat in ſemicirculo A F B, poteſt linea huic æqualis Df in ſemicirculo oppoſito duci, lineæque Df, Ef etiam problemati ſatisfaciunt, ſed ſunt hæ negativæ (265.); habet ergo x duos valores DF, Df, æquales, quorum unus affirmativus alter negativus eſt, ideò non poſſumus detegere x, niſi in Æquatione quæ dat valorem Quadrati xx. Detegitur hæc Æquatio additione trium Æquationum.

$$xx - yy = bb$$
$$xx = aa + bb + 2az$$
$$yy = aa + bb - 2az$$

$$2xx = 2aa + 3bb$$
$$xx = aa + \tfrac{3}{2}bb$$

287. Univerſaliter obſervandum, quando linea datur, quæ reſpectu duarum linearum, quibus Problema ſolvitur, eandem relationem habet ut hic DG reſpectu DF,

D f, talem lineam quærendam eſſe, ſi modo hujus determinatio det Problematis ſolutionem.

PROBLEMA 30.

TAB. II. fig. 1. 288. *Iiſdem poſitis detegere punctum* F *tale, ut radius ſit media proportionalis inter lineas* FD, FE,

Deſignatis lineis iiſdem litteris ac in Problemate præcedenti habemus Æquationes has

$$xy = bb$$
$$xx = aa + bb + 2az$$
$$yy = aa + bb - 2az.$$

In hiſce Æquationibus nihil datur ex quo ſequatur x potius majorem quam minorem deſignare lineam, debet ergo utramque deſignare; nam in duabus ultimis Æquationibus y major erit, ſi z ſit negativa; Idcirco x aut y habebunt duos affirmativos valores; habent etiam in oppoſito ſemicirculo duos reſpondentes negativos; quare quadrata xx, & yy, duos valores habent. Si ergo quæramus x neceſſario incidimus in Æquationem quatuor dimenſionum, quæ, ſi quæramus valorem Quadrati xx ſolvitur ut Æquatio duarum di-

dimenſionum propter duos valores hujus Quadrati.

Si autem determinetur z. Problema etiam ſolutum eſt, quia dato G, determinabitur F. Duos vero valores tantum habet z, & æquales, ſed affirmativum unum C G, negativum alterum Cg. Quæro ergo z quia perveniam ad Æquationem quæ dabit valorem Quadrati zz.

Prima Æquatio dat

$$xx = \frac{b^4}{yy}$$

Secunda mutatur in hanc,

$$\frac{b^4}{yy} = aa + bb + 2az.$$

Unde in ſubſidium vocatâ tertiâ Æquatione,

$$yy = \frac{b^4}{aa + bb + 2az} = aa + bb - 2az.$$

Quæ ultima Æquatio factâ reductione (171. & *ſeq.*) in hanc mutatur

$$zz = \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}bb$$

Duplicetur Quadratum $\frac{1}{4}bb$ (280.) cujus Radix $\frac{1}{2}b$, tunc habemus Radicem Quadrati $\frac{1}{2}bb$, & quærendo Quadratum æquale duobus Quadratis (280.) Problema conſtruitur.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA 31.

TAB. II, fig. 2.

289. *Dato Quadrato* A B C D, *ex angulo* A *ducere lineam ita, ut pars* F E *intercepta inter latus* C D *&* *latus* B C *continuatum æqualis ſit lineæ datæ.*

Conſiderando hoc Problema remotis reſtrictionibus, quæ in ſolutione conſiderari non poſſunt, patet Problema reduci ad hoc, ex puncto A ducere lineam ita, ut pars intercepta angulo, quem efficiunt lineæ D C, B C, æqualis ſit lineæ datæ.

Et facile videmus Problema habere quatuor ſolutiones; lineæ enim A F E, A *E F* *e*A*f*, eAf, in quibus FE, *EF*, *ef*, ef, ſingulæ æquales ſunt lineæ datæ, requiſito ſatisfaciunt.

Si nunc quæramus AF, Æquatio etiam dabit A *F*, A f, & A*f*, eritque Æquatio quatuor dimenſionum.

Si quæramus D F, detegimus præter hanc lineam etiam D*F*, D f, D*f*.

Obſervandum autem FE, *FE*, ſimiliter poſitas eſſe ut & *fe*, fe; ideo variæ lineæ dantur quæ eodem modo ſeſe habent reſpectu F E, & *FE*; inter has talis ſeligenda eſt, qua nota Problema ſolutum eſt (287.) Si

Si concipiamus puncta media L, *L* linearum F E, *FE* jungi, ſecabit hæc in M productam diagonalem AC Quadrati dati, & A M aut C M eodem modo ſeſe habet reſpectu utriuſque lineæ; dato autem puncto M, Problema ſolvitur; quia ML perpendicularis eſt ad A C, & quia C L æqualis eſt L E quæ datur.

Quærenda igitur eſt AM aut CM quæ ſingulæ duos tantum habent valores AM, A*m*, aut CM, C*m*.

Examinatâ figurâ, video computationem ſimpliciorem fore, ſi quæratur CM; hanc igitur dico *x* & pono.

$$CM = x$$
$$FE = 2a$$
$$AB = AD = b$$
$$AC = c$$
$$AF = y$$
$$FD = z.$$

Triangula ABE, AFD ſunt ſimilia & AE $(y + 2a)$, AB (b) :: AF (y), FD (z).

In triangulo rectangulo AFD Quadratum AF (yy) valet Quadrata $zz + bb$

Tandem in triangulo ACL, propter LM perpendicularem ad AC, Quadratum AL $(\overline{y+a}^2)$ valet Quadrata laterum

AC,

TAB. II. fig. 3. Sit Quadratum DCEF; Dicatur latus x; differentia data $AB = a$. Quadratum diagonalis $DE = x + a$ valet Quadrata DC, CE ideſt $2xx$; ergo.

$$xx + 2ax + aa = 2xx$$

aut

$$xx - 2ax - aa = 0.$$

Æquatio hæc duas habet Radices quarum affirmativa ſola Problemati ſatisfacit; negativam etiam detegimus, quæ valet latus demtis $2a$; quia ſi hæc differentia dicatur $-x$ ad eandem Æquationem $xx - 2ax - aa = 0$ pervenimus: ſed de hac minime agitur in Problemate noſtro Geometrice conſiderato, quod ipſa figura demonſtrat.

PROBLEMA 33.

TAB. II. fig. 4. 292. *Detur ſemicirculus* AEB *& ad* AB *continuatam, indeterminata perpendicularis* DF, *ducenda eſt* AF *ita ut* ∺ EF, DF, AE.

Primo intuitu liquet poſſe continuari FD infra AD, circulumque poſſe abſolvi, nullamque ex lineis EF, DF, AF poſſe detegi niſi æqualem valorem negativum detegamus; Æquatio ergo neceſſario

rio dabit Quadratum quantitatis quæſitæ.

$EF = x$

$DF = y$

$AE = z$

$AB = a$

$AD = b$

Æquationes ex his proportionibus deducuntur

$\div EF(x), DF(y), AE(z).$

$AB(a), AE(z) :: AF(z+x), AD(b).$

$AF^q(\overline{z+x}^2) = FD^q(yy) + AD^q(bb).$

Ergo

1ª. $xz = yy$

2ª. $zz + zx = ba$

3ª. $zz + 2zx + xx = yy + bb.$

Tertia Æquatio ſubductione primæ & ſecundæ ad hanc reducitur

$$xx = bb - ba.$$

Sed quamvis nunc detur x, Problema nondum ſolutum eſt; quia non poſſum ducere AF niſi detur AE aut DF, id eſt, z aut y. Quæro z quia facilius detegitur.

Secunda Æquatio in hanc mutatur

$$zx = ba - zz$$

$$zzxx = bbaa - 2bazz + z^4$$

ergo

$$zzbb - zzba = bbaa - 2bazz + z^4.$$

K id

id eſt

$$z^4 - abzz + bbaa = 0$$
$$- bbzz$$

Quæ Aequatio quatuor habet Radices, duas poſitivas, & hiſce æquales duas negativas, id eſt Quadratum zz duos habet valores, ſed unus rejiciendus eſt (230.); quia z^4 eſt Quadratum Radicis $-zz$, non hujus $+zz$, & hoc non a linea ad arbitrium ducta, ſed ex natura Problematis ſequitur.

Poſſumus etiam ad duas reducere dimenſiones Æquationem hanc; ſi ponamus

$$bb - ba = dd.$$

Tunc x valet $+d$ & $-d$ pro x in Æquatione $zx = ba - zz$ ſubſtituo hos valores, & habeo duas has Æquationes

$$zz + dz - ba = 0$$
$$zz - dz - ba = 0$$

Quæ ſingulæ Æquationes Radicem unam habent affirmativam, alteram negativam.

Rejicio ambas Radices ultimæ Æquationis; quia non agitur de x negativa.

In prima Radicem ſeligo poſitivam, rejecta negativa.

293. Obſervandum hanc Radicem negativam cum affirmativa Æquationis $zz - zx$
$- ba$

$-ba = 0$ pertinere ad caſus impoſſibiles (235. 236.): ſi enim quæramus y, videmus Problema duas habere ſolutiones, quæ quidem Algebraice exprimi poſſunt, ſed re vera impoſſibiles ſunt.

Prima Æquatio mutatur in hanc

$$y^4 = zzxx = bbzz - bazz$$

Secunda mutatur in hanc

$$zz = ba - yy$$

ergo

$$y^4 = \overline{bb - ba} \times \overline{ba - yy}$$

aut

$$\begin{array}{l} y^4 + bbyy - ba^3 = 0 \\ \quad - bayy + bbaa \end{array}$$

Æquatio hæc duos dat valores Quadrati yy, quorum unus negativus eſt, & indicat duos habere valores impoſſibiles y (218.)

OBSERVATIO 8.

294. Aliquando contingit numerum ſolutionum ſuperare dimenſiones Æquationis qua Problema ſolvitur, quod paradoxum eſt, quia ex ante explicatis (212.) manifeſtum eſt, non plures incognitam habere poſſe valores, quam ipſa in Æqua-

Digitized by Google

tione ſolitaria habet dimenſiones.

Caſus etiam de quo agimus in Geometricis tantum locum habet, & contingere poteſt, quia numerus ſolutionum Geometricarum ſuperare poteſt numerum ſolutionum Algebraicarum. Hoc in iis occaſionibus obtinet, in quibus plures lineæ æquales poſitivæ, aut negativæ Problema ſolvunt; Algebraice enim varii valores æquales ſunt idem valor.

295. Notandum autem, non ſemper in talibus occaſionibus ad Æquationem ſimpliciorem perveniri: nam Algebraica Æquatio poteſt continere duos valores æquales ejuſdem incognitæ, id eſt Algebraice rem conſiderando bis eundem valorem. In hac Æquatione $xx - 2ax + aa = 0$ habet x duos valores æquales a, quod ſi de Geometricis non agatur nihil aliud ſignificat præter hoc x valet a, & in Problematibus in quibus $x = a$ poſſumus pervenire ad Æquationem hanc $x - a = 0$, aut ad hanc $xx - 2ax + aa = 0$ aut etiam ad magis compoſitam. Sed non ſemper pervenimus ad illam quæ exprimit numerum ſolutionum æqualium Geometricarum. Obſervatio hæc ſequenti Problemate illuſtratur.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA 34.

296. *In circumferentia ſemicirculi* ADB; *cujus centrum* C; *quæritur punctum* D, *ex quo ſi dimittatur perpendicularis* DE, *in diametrum* AB, *rectangulum* CE *per* ED *æquale ſit Quadrato lineæ* FH. TAB. II. fig. 5.

Ponimus

$$CD = a$$
$$CE = x$$
$$DE = y$$
$$FH = b$$

Et habemus has Æquationes

$$xy = bb, \qquad y = \frac{bb}{x}.$$

$$aa = xx + yy.$$

Facta ſubſtitutione

$$aa = xx + \frac{b^4}{xx}$$

$$x^4 - aaxx + b^4 = 0$$

Quæ Æquatio, ſi ſolvatur (217.), duos dat valores Quadrati xx, qui ſinguli habent Radicem poſitivam & æqualem negativam; habet ergo x (CE) duos valores ad partem utramque centri, & quatuor puncta E, E, e, e, hac ſolutione

 de-

determinari poſſunt.

Singulis ex punctis E, E, e, e, duæ reſpondent ſolutiones, affirmativa una ſupra lineam AB, negativa altera, infra lineam; y ergo quatuor habet valores affirmativos, & totidem negativos. Sed in Æquationibus datis ſi quæramus y, habemus

$$y^4 - aayy + b^4 = 0.$$

quæ Æquatio duos tantum dat valores poſitivos & totidem negativos; ſed propter æquales ED, $e D$, & ED, eD, ratio hujus manifeſta eſt (294, 295.).

297. Hæc autem Æquatio $x^4 + aaxx + b^4 = 0$ ut conſtruatur, primo ſolvenda, eſt (217.) ut ad duas ſimpliciores reducatur, & habemus

$$xx = \tfrac{1}{2}aa + \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 - b^4},$$
$$xx = \tfrac{1}{2}aa - \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 - b^4}.$$

Lineis a & b quæro tertiam proportionalem (277), quam dico d, eſtque

$$bb = ad, \text{ \& } b^4 = aadd;$$

unde $\sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 - b^4} = a\sqrt{\tfrac{1}{4}aa - dd}$ (194).

Poteſt nunc determinari $\sqrt{\tfrac{1}{4}aa - dd}$ (281.), & pono

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}aa - dd} = e.$$

Fa-

Facta ſubſtitutione habemus

$$xx = \tfrac{1}{2}aa + ae$$

$$xx = \tfrac{1}{2}aa - ae$$

Quarum conſtructio non eſt difficilis (279).

Potuiſſet huc referri n. 199. Vide Prob. 11. quod cum hoc non differt.

OBSERVATIO 9.

298. Vidimus in quibuſdam problematibus Geometricis quomodo negativæ ſolutiones aliquando rejiciantur; hoc plerumque fit ubi ad unam partem lineæ quærimus conſtructionem, quæ ad aliam partem eodem modo obtinet. De cætero raro in Geometricis Radices rejiciuntur quia negativæ ſunt. Negativa enim linea ſitu tantum a poſitiva differt (264. 265.); quare ſæpe ſolutiones poſitivæ in negativas mutantur & vice verſa ſola variatione cognitarum, poſſuntque caſus varii determinari ſola conſideratione Æquationis qua Problema ſolvitur. Quod exemplo illuſtrabimus.

PROBLEMA 35.

299. *Ducere Circulum, qui per datum punctum tranſeat, & tangat lineam poſitione*

ne datam, ut & circulum magnitudine & poſitione in eodem plano datum.

TAB. III. fig. 1. Sit A punctum datum; BD linea indeterminata data; EF circulus datus cujus centrum C.

Quæro centrum circuli deſiderati, & pono hoc eſſe N. Ductâ NC erit E punctum contactus circuli quæſiti & circuli dati; Ductâ NI perpendiculari ad BD, erit I punctum contactûs circuli quæſiti & lineæ datæ: ſunt ergo radii ejuſdem circuli; ideoque æquales NA, NI, NE.

Duco ad BD perpendicularem *AB*, quam in duas partes æquales divido in M, & duco ML parallelam ad BD; concipio AI ductam, quam ſecat ML in O, & quidem in duas partes æquales, propter æquales AM, MB. Idcirco in triangulo Iſoſcele ANI, NO perpendicularis eſt ad AI, & eſt NOI triangulum rectangulum, in quo OL perpendicularis eſt ad Hypotenuſam, &

$\div$ NL, LO, LI.

Si NI producta concipiatur in H ita, ut IH æqualis ſit EC, & ductam fingamus CH, triangulum CNH erit Iſoſceles. Ducatur nunc CD perpendicularis

ad

ad BD, ſitque hæc producta ad G uſque ita, ut DG & IH aut EC æquales ſint, id eſt HG parallela ad BD; ſecetur CG in Q in duas partes æquales ductaque QR parallela ad BD ſecabit hæc CH æqualiter in P & erit NP perpendicularis ad HC, quare triangulum NPH rectangulum eſt, ad cujus hypotenuſam perpendicularis eſt PK, unde ſequitur

$$\div\!\!\div \ NK, KP, KH.$$

Ponamus nunc

$$BD = 2a$$
$$CQ = QG = KH = b$$
$$AM = MB = LI = c.$$
$$MR = LK = d$$
$$MO = OL = x$$
$$NL = y$$

eſt ergo $PQ = KP = a - x$

Duas tantum habemus incognitas x & y, quibus datis determinari poterit N, habemus etiam duas Proportiones continuas, quæ, Algebraice expreſſæ, ſunt,

$$\div\!\!\div \ y, x, c.$$
$$\div\!\!\div \ d+y, a-x, b.$$

Hæ dant Æquationes

Digitized by Google

$$xx = yc \text{ aut } y = \frac{xx}{c}$$

$$aa - 2ax + xx = db + by$$

Facta ſubſtitutione

$$aa - 2ax + xx = db + \frac{bxx}{c}$$

unde

$$xx - \frac{2cax}{c-b} + \frac{aac - dbc}{c-b} = 0$$

CASUS I.

300. Si c ſuperet b, id eſt, ſi AB major fuerit CG, ſecundus terminus Æquationis negativus eſt; ſi in eodem caſu aa ſuperet db, id eſt, ſi BD excedat duplicatam mediam proportionalem inter MR & CQ, erit affirmativus ultimus terminus, & Æquatio habet duas Radices affirmativas (215.) id eſt, circuli duo proprietatem requiſitam habent, quorum centra dantur ad illam partem lineæ AB ad quam datur linea CD, ſed centrum unum inter haſce lineas, alterum ultra CD detegitur.

C A-

Digitized by Google

CASUS 2.

301. Si, manente c majori b, rectangulum db ſuperet aa, negativus erit tertius terminus, & radix una negativa eſt altera affirmativa (215.) id eſt linea AB dabitur inter centra amborum circulorum quibus Problema ſolvitur.

CASUS 3.

302. Hoc etiam continget ſi b ſuperet c & aa excedat db (215.); nam tunc affirmativus eſt ſecundus terminus & tertius negativus.

CASUS 4.

303. Sed ſi dum b ſuperat c, rectangulum db excedit aa, omnes termini affirmativi ſunt, & ambæ Radices negativæ (215.) quare ambo centra ad eandem partem dantur lineæ AB, quæ inter ipſa & lineam CQ poſita eſt.

CASUS 5.

304. Si $aa = bc$, Æquatio mutatur in hanc,

$xx - \frac{2cax}{c-b} = 0$ cujus Radices ſunt

$$x = 0.$$

$$x = \frac{2ca.}{c-b}$$

Id eſt centrum unum datur in ipſa linea AB, alterum datur ad eandem partem hujus lineæ ad quam datur CD, ſi *c* ſuperet *b*, ſecus ſi *b* excedat *c*.

CASUS 6.

305. Si $c = b$, Æquatio multiplicata per $c - b$ eſt

$$xx \times \overline{c-b} - 2acx + aac - dbc = 0$$

Sed $c - b = 0$; ergo habemus

$$2ax = aa - db$$

$$x = \frac{aa - db}{2a}$$

Unicamque habet Problema ſolutionem, alio centro in infinitum abeunte.

306. Quod autem ſpectat conſtructionem hujus Æquationis

$$xx - \frac{2acx}{c-b} + \frac{aac-bdc}{c-b} = 0,$$

Quæ-

Quærenda eſt quarta proportionalis hiſce tribus $c-b$, c, a, quam dicimus f; & alia hiſce tribus a, b, d, quam dico g; ideo

$$c-b, c :: a, f = \frac{ac}{c-b},$$

$$a, b :: d, g, \& \; ag = bd,$$

Æquatio nunc mutatur in hanc

$$xx - 2fx + \overline{a-g} \times f = 0$$

Detecta nunc mediâ proportionali inter $a-g$ & f, ſitque hæc h, pervenimus ad hanc Æquationem

$$xx - 2fx + hh = 0$$

Cujus conſtructionem explicavimus (217.)

Quando b ſuperat c, datur $+ 2fx$ contra $- 2fx$ quando c excedit b. Quando a major eſt g habemus $+ hh$, contra $- hh$ quando g magnitudine vincit a.

OBSERVATIO 10.

307. In Problematibus Geometricis non ſemper neceſſe eſt eo uſque continuare computationem, donec ad ſolitariam perveniamus Æquationem. Ubi pervenimus ad Æquationem, quæ dat Proportionem inter duas incognitas; ſi hæ duæ tantum ſuperſint, figura examinanda eſt, quia ſæpiſ-

Digitized by Google

piſſime ex tali Æquatione conſtructionem deducimus, ut hoc patebit in Problemate ſequenti & in Problemate 41.

PROBLEMA 36.

308. *Deſcribere Circulum, qui Circulum, poſitione & magnitudine datum, contingat, & per duo Puncta data, in eodem Plano cum Circulo, tranſeat.*

TAB. III. fig. 2. Sint puncta data A & B; circulus datus eſt DE, cujus centrum C.

Ducta AB, ſit hæc æqualiter ſecta in F, & in hoc puncto perpendicularis erecta FG ad AB.

Clarum eſt centrum circuli quæſiti dari in hac perpendiculari. Fingamus hoc eſſe N, & concipiamus lineas ductas NA, NC, quarum hæc ſecat circulum datum in E, erunt æquales NA, NE.

Ex C ad FG dimittatur perpendicularis CH, & ſint

$$FH = a$$
$$FA = b$$
$$CH = c$$
$$CE = d$$
$$NH = x$$
$$NE = NA = y$$

In

In triangulis rectangulis NCH & NFA habemus

$NC^q = CH^q + NH^q$, & $NA^q = AF^q + FN^q$ id eſt

$$yy + 2dy + dd = cc + xx$$
$$yy = bb + aa + 2ax + xx$$

Subtraho ſecundam Æquationem ex prima,

$$2dy + dd = cc - bb - aa - 2ax$$
$$2dy = cc - bb - aa - dd - 2ax$$

Quæro Quadratum æquale $cc - bb - aa - dd$ (280. 281.); ſit hoc ee.

Quæro tertiam proportionalem his duabus quantitatibus $2a$, e, quam dico f; &

$$2af = cc - bb - aa - dd,$$

Ergo

$$dy = af - ax,$$

unde

$$y, f - x :: a, d.$$

Si nunc ſumatur $HI = f$, eſt $NI = f - x$ & erit

$$NE, NI :: a, d.$$

Concipiamus ductam IE, & ad hanc parallelam CL, erit etiam

$$a, d :: EC(d), IL = \frac{dd}{a}.$$

Un-

Digitized by Google

Unde hanc deducimus conſtructionem. Poſitis, ut ante dictum, jam ductis lineis AB, FG, CH, quæ dantur, ſumo HI $= f$, quæ datur; & IL $= \frac{dd}{a}$ quæ etiam datur; duco LC, & per I ad hanc parallelam IE, quæ circulum DE ſecat in E & e, per C & E duco lineam, quæ producta ſecat FG in N, quod eſt centrum quæſitum, ut ex explicatis ſequitur.

Punctum e indicat & aliam Problematis ſolutionem dari, & productam e C, interſectione ſua cum linea FL, ſecundi circuli centrum determinare.

Quando N cadit ad aliam partem Puncti H negativa eſt x, ſed eo conſtructio non mutatur.

Quando $bb + aa + dd$ ſuperat cc, ponimus $bb + aa + dd - cc = ee$, & in hoc caſu f negativa eſt; quare Punctum I ad aliam partem pnncti H notatur (264.)

OBSERVATIO II.

309. Explicatis, quæ in ſolutione Algebraica Problematum Geometricorum obſervanda ſunt, addendum non tamen ſemper Algebram neceſſariam eſſe; in multis e-

enim occaſionibus conſtructio quam facillime ex vulgo notis figurarum proprietatibus deducitur; quare hoc primum tentandum ante computationem initam.

PROBLEMA 37.

310. *Circulum deſcribere, qui duas datas Lineas tangat, & per Punctum, in eodem Plano datum, tranſeat.*

Sit A punctum datum; & BD, EF, lineæ datæ; ſint hæ productæ donec ſeſe mutuo ſecent in G, ducatur GN, quæ angulum DGE in duas partes æquales dividit, (267.) clarum eſt, centrum circuli quæſiti dari in hac linea. Ex A ad hanc ipſam lineam ſit AI perpendicularis (269): clarum iterum eſt, ſi hæc fuerit producta, & IH ſit æqualis AI, etiam H eſſe in circumferentia circuli quæſiti. TAB.II. fig. 6.

Hiſce poſitis, fingamus N eſſe centrum quæſitum, & NM perpendicularem eſſe ad EF, erit N radius hujus circuli, & M punctum contactus.

Hæc omnia conſideranda forent ante computationem, quam inutilem eſſe ſtatim percipimus, ſi continuemus lineam AH donec in K ſecet EF; nam clarum eſt

L KM

Digitized by Google

KM eſſe mediam proportionalem inter notas lineas KA, KH (36. El. III.) quare datur M (279.) in quo puncto ſi ad EF erecta fuerit perpendicularis ſecabit hæc in N lineam GI, & determinabit centrum circuli quæſiti.

OBSERVATIO 12.

311. Dantur aliquando conditiones in Problematibus Geometricis quæ minime Algebraice exprimi poſſunt, in quibus occaſionibus ex ſolis conſiderationibus Geometricis ſolutio deducenda eſt.

PROBLEMA 38.

312. *Datis, in eodem Plano, Puncto & Parallelogrammo, per Punctum hoc ad Lineam, in eodem Plano datam poſitione, ducere Parallelam, ſine Circuli operatione.*

TAB. III. fig. 3. Per punctum A ad BF ducenda eſt parallela, ductis tantum rectis; dato in eodem plano parallelogrammo IL.

Algebram inutilem in hoc Problemate eſſe ſolâ ipſius conſideratione patet; Algebraica enim ſolutio omnis ad Æquationem conducit, quarum nulla ſine circuli operatio-

tione conſtrui poteſt. Ex Geometricis conſiderationibus ſolutio ergo deducenda eſt.

Produco tria parallelogrammi latera donec lineæ datæ occurrunt in B, C, F, quam etiam in E ſecat diagonalis producta KM; latus quartum IK, indeterminatim producitur.

His poſitis hæc eſt conſtructio. Ex A duco lineas ad B & C, quarum prima ſecat latus IK, aut ipſius continuationem, in D; ex quo duco DE, ſecantem AC in G; per quod punctum duco FG; quæ continuata lateri IK, aut ipſius continuationi, occurrit in H; erit AH parallela ad BF.

DEMONSTRATIO

Ex C ad N, interſectionem linearum FL & ED, duco rectam CN.

Propter parallelas KB, MC;

EC, EB :: EM, EK.

Propter parallelas DK, NM;

EN, ED :: EM, EK.

Ergo

EC, EB :: EN, ED.

Quare parallelæ ſunt ADB & NC; unde ſequitur ſimilia eſſe triangula CGN, AGD; & eſt

GN, GD :: GC, GA.

Sed propter parallelas NF, DH, ſimilia ſunt triangula FGN, & HGD, &

GN, GD :: GF, GH

Idcirco

GC, GA :: GF, GH

& ſunt ſimilia triangula CGF, *AGH* (6. El. VI.); nam anguli FGC, HGA, oppoſiti ad verticem ſunt æquales; ergo æquales anguli CFG, AHG, & parallelæ FC, AH (27. El. I).

Caſus diverſi dari poſſunt hujus Problematis; ſed omnium ſolutio facilis eſt hac ipsâ traditâ conſtructione, quæ in hac figura locum habet ubicunque concipiatur punctum A.

Sed quando propter parallelogrammi ſitum reſpectu lineæ BF determinari non poſſunt puncta omnia B, C, E, F, aliud parallelogrammum delineandum eſt, quod facile fit cùm unum detur.

TAB. III. fig. 4. 313. Sit IKLM parallelogrammum datum, cujus diagonalis ſit KM. Ducantur lineæ duæ rectæ ad libitum RS, PQ, quæ ſeſe mutuo ſecent in O, puncto quocun-

cunque diagonalis, quarum prima in R & S occurrit lateribus IK, ML parallelogrammi dati, cujus latera alia linea PQ, in P & Q, ſecat. Junctis R, Q, & P, S, erunt hæ parallelæ, & continuatis his, ut & lateribus KL, MI, novum habebimus parallelogrammum TQVP.

DEMONSTRATIO

Propter parallelas KR, MS, ſimilia ſunt triangula MOS, ROK. Etiam ſimilia ſunt POM, KOQ, propter parallelas MP, KQ. Ergo

SO, OR :: MO, OK

PO, OQ :: MO, OK

ideo

SO, OR :: PO, OQ

Quare triangula PSO & ROQ ſimilia ſunt, & PS, RQ parallelæ.

CAPUT XVI.

De Problematibus Phyſicis.

314. PRoblemata Phyſica ut alia ſolvuntur, ſi ad hoc attendamus, juxta regulam n. 183. aliunde nota in ſubſi-

Digitized by Google

ſidium vocari ut Æquationes formentur.

PROBLEMA 38.

315. *Data altitudine Mercurii in Barometro, determinare Mercurii altitudinem in tubo cylindrico, cujus longitudo datur, & in quo nota datur Aëris quantitas.*

Detur altitudo Mercurii in Barometro a; longitudo aliùs tubi cylindrici verticalis, ſupra Mercurii ſuperficiem, b; hunc ponimus in ſuperiori parte clauſum, & in eo dari aëris quantitatem, quæ in ſtatu aëris exterioris in tubo occuparet ſpatium c; determinanda eſt altitudo ad quam Mercurius in hoc tubo preſſione Atmoſphæræ ſuſtineri poſſit: altitudinem hanc dicimus x.

Non poteſt Problema hoc ſolvi niſi lex juxtà quam aër ſeſe expandit nota ſit, & eſt hæc, *ſpatia occupata ab Aëre eſſe inter ſe inverſe ut vires comprimentes.*

Quando Aër in tubo contentus occupat ſpatium c, a tota Atmoſphæra comprimitur, & vis comprimens poteſt ſuſtinere columnam Mercurii cujus altitudo eſt a.

Sed Aër in tubo eſt dilatatus, occupatque ſpatium $b-x$; preſſio autem Atmo-

moſphæræ duos edit effectus, ſuſtinet Mercurium ad altitudinem x, & reliqua ſua vi, qua nempe poſſet ſuſtinere columnam Mercurii $a-x$, Aërem in tubo comprimit.

Ergo quando ſpatia ab Aëre occupata ſunt c & $b-x$, vires comprimentes, quæ ſunt inverſe ut ſpatia, ſunt inter ſe ut a ad $a-x$. Idcirco

$$c,\ b-x :: a-x,\ a,$$
$$ca = ba - bx - ax + xx,$$
$$\begin{matrix} xx - ax + ba = 0. \\ \quad - bx - ca \end{matrix}$$

Quæ Æquatio duas habet Radices poſitivas (215.) quarum una tantum uſu venit, quæ ab alia diſtinguitur (230.) ſi ad hoc attendamus xx in Æquatione habere radicem $-x$.

PROBLEMA 39.

316. *Dato Mixto ex duobus metallis notis; determinare quantum ex utroque metallo contineat.*

Ut Problema hoc ſolvatur ſatis eſt notum habere metalla diverſa, pondere æqualia, inæquales partes ponderis amittere quando in aqua ponderantur.

Digitized by Google

Detur nunc Mixtum ex Auro & Argento, ſitque Mixturæ pondus a, dentur præterea duo fruſta quæcunque, unum ex Auro puro, alterum ex Argento puro, hæc ut & ipſa Mixtura, in aqua ponderanda ſunt.

Singula hæc corpora ex pondere amittent; ſit b pondus amiſſum a mixtura a; ſit ulterius pondus Auri c, & pondus ab hoc amiſſum in aqua d; tandem ſit pondus Argenti e, & pondus amiſſum f.

Dicatur x pondus auri in mixtura, eritque pondus argenti $a-x$; dicatur y, pondus ab Auro in mixtura in aqua amiſſum; erit $b-y$ pondus ab Argento in eadem Mixtura in aqua amiſſum.

Clarum eſt pondus auri c ad pondus auri x, ut pondus à c amiſſum ad pondus quod amiſit x; quod & ad argentum e & $a-x$ etiam applicari debet. Ergo

$$c, x :: d, y.$$
$$e, a-x :: f, b-y.$$

Unde deducimus

$$dx = cy, \text{ aut } y = \frac{dx}{c}.$$

$$e, a-x :: f, b-\frac{dx}{c}.$$

fa

$$fa - fx = be - \frac{dex}{c}$$

$$x = \frac{cfa - cbe}{cf - de}$$

PROBLEMA 40.

317. *Ex puncto dato* A, *data velocitate, corpus projicere in punctum datum* B. TAB. III. fig. 5.

Quando velocitas datur poteſt determinari altitudo a qua corpus cadendo hanc poteſt acquirere: ſit hæc DA, quam lineam verticalem ponimus.

Hoc in Phyſicis notum eſt, corpus projectum dum juxta lineam projectionis motu uniformi movetur cadendo interea percurrere ſpatia, quæ ſunt ut quadrata temporum; hoſque duos motus ſe mutuo non turbare. Præterea notum eſt corpus velocitate cadendo a certa altitudine acquiſita, motu uniformi, in tempore æquali tempori caſus, percurrere ſpatium æquale duplo altitudinis memoratæ.

Hiſce poſitis ſit AE directio quæſita, juxta quam corpus motu projectitio percurrit AE, in tempore in quo cadendo percurrit EB, poſitâ hac linea verticali.

Digitized by Google

Ponamus

$$AB = a.$$
$$AD = b.$$
$$AE = x.$$
$$EB = y.$$

In tempore in quo corpus poteſt cadere per y, motu projectitio percurrere poteſt x.

In tempore in quo corpus cadit per b, motu projectitio poſſet percurrere $2b$.

Spatia motu uniformi eadem velocitate percurſa ſunt ut tempora; ſpatia cadendo percurſa ſunt ut quadrata temporum. Ergo.

$$xx, 4bb :: y, b,$$
$$4by = xx,$$
$$:: 4b, x, y.$$

Produco AD, in F & eſt AF = 4AD; video nunc lineam AE ita eſſe ducendam ut AF, AE, EB ſint in continua proportione; quod continget, ſi ducta EF triangula AEF, AEB, fuerint ſimilia, poſitis æqualibus angulis AFE, EAB; unde ſequitur problema eſſe ſolutum, ſi per punctum F deſcribatur circulus qui in puncto A tangit AB, quod facile eſt, ſecabit enim hic in puncto E lineam verticalem per B tranſeuntem (32. El. III.). Cum ve-

Digitized by Google

vero linea hæc à circulo in duobus punctis ſecetur, ſequitur, per duas directiones corpus projici poſſe. Vide obſerv. 10. n. 307.

Simplex admodum & univerſaliſſima eſt hæc Problematis celeberrimi conſtructio, ad quam methodo, hîc expoſita, perveni, quam eandem poſtea vidi explicatam à Profeſſore Cantabrigienſi Rogerio Cotes.

Si quærendo ſecundam Æquationem ſolutio Algebraica fuiſſet abſoluta, conſtructio Æquationis quæ Problematis ſolutionem dediſſet magis fuiſſet compoſita; & conſiderationes ſolæ Geometricæ difficilius ad hanc conſtructionem deducere potuiſſent.

FINIS.

Digitized by Google

SPECIMEN
COMMENTARII
IN
ARITHMETICAM
UNIVERSALEM
NEWTONI.

Digitized by Google

Digitized by Google

SPECIMEN COMMENTARII IN ARITHMETICAM UNIVERSALEM NEWTONI.

PRÆFATIO.

NOn omnes auctores tironibus ſcribunt, neque æquum foret hoc ab iis petere. Dum quæ in Mathematicis & Phyſicis ſubtiliora ſunt, Philoſophis impertitur Newtonus, quis ab eo expectabit primorum Algebræ Elementorum tractationem. Matheſeos olim Cantabrigiæ Profeſſor Juventuti Academicæ hæc quidem Elementa explicavit; prælectioneſque in ſcriptis ex lege Academica

huic

huic ipſi tradidit; ſed ſcripta hæc non prælo deſtinaverat auctor; & theſaurus hic abſconditus adhucdum lateret, niſi invito auctore cum publico fuiſſet communicatus. Factum non probamus, Matheſeos cultoribus tamen gratulamur, non diutius in tenebris hærere librum, celeberrimo ſuo auctore certiſſime dignum.

Operis hujus uſus latius pateret, ſi multa, concinne & pulcherrime quidem dicta, ad captum tironum magis eſſent aptata: ſi alia, tantum indicata, clarius eſſent explicata. Scripta talia, quæ paucis verbis magnam materiam complectuntur, Mathematicis quidem magis grata ſunt, ſed non omnibus, qui animum hiſce ſcientiis applicant, utilia.

Defectus hicce corrigitur, neque Mathematici illius quod ipſis placet jacturam patiuntur, ſi ſcripta talia illuſtrentur commentario, qui ab his negligi poterit, qui tali non indigent.

Primordinis Mathematici præcedenti ſeculo, non indignam Carthéſii Geometri-

Digitized by Google

triam dijudicarunt, quam commentariis ſuis illuſtrarent, & talem operam non minus Newtonus in Arithmetica mereatur. Optandumque eſt inter tot magni nominis Mathematicos, qui hoc tempore vigent, aliquem opus hoc in ſe ſuſcepturum.

Nos autem ut Mathematicorum attentionem excitemus circa neceſſitatem talis commentarii, ſpecimen hoc damus, in quo duo loca non inter difficillima illuſtrare conamur.

NEWTONI ARITHMETICA UNIVERSALIS.

Pag. 42.

De inventione Diviſorum.

HUC ſpectat inventio diviſorum per quos quantitas aliqua dividi poſſit.

1. *Si quantitas ſimplex eſt di-*

vide eam per minimum ejus diviſorem, & quotum per minimum diviſorem ejus, donec quotus reſtet indiviſibilis, & omnes quantitatis diviſores primos habebis. Dein horum diviſorum ſingulos binos, ternos, quaternos, &c. duc in ſe, & habebis etiam omnes diviſores compoſitos. Ut ſi numeri 60 diviſores omnes deſiderentur, divide eum per 2, & quotum 30 per 2, & quotum 15 per 3 & reſtabit quotus indiviſibilis 5. Ergo diviſores primi ſunt 1, 2, 2, 3, 5: ex binis compoſiti 4, 6, 10, 15: ex ternis 12, 20, 30, ex omnibus 60. Rurſus ſi quantitatis 21*abb* diviſores omnes deſiderentur, divide eam per 3, & quotum 7*abb* per 7, & quotum *abb* per *a*, & quotum *bb* per *b*, & reſtabit quotus primus *b*. Ergo diviſores primi ſunt 1, 3, 7, *a*, *b*, *b*; ex binis compoſiti 21, 3*a*, 3*b*, 7*a*, 7*b*, *ab*, *bb*; ex ternis 21*a*, 21*b*, 3*ab*, 3*bb*, 7*ab*, 7*bb*, *abb*; ex quaternis 21*ab*, 21*bb*, 3*abb*, 7*abb*; ex quinis 21*abb*. Eodem modo ipſius

2*abb*

$2abb - 6aac$ diviſores omnes ſunt 1, 2, a, $bb - 3ac$, $2a$, $2bb - 6ac$, $abb - 3aac$, $2abb - 6aac$.

2. *Si quantitas poſtquam diviſa eſt per omnes ſimplices diviſores manet compoſita & ſuſpicio eſt eam compoſitum aliquem diviſorem habere, diſpone eam ſecundum dimenſiones literæ alicujus quæ in ea eſt, & pro litera illa ſubſtitue ſigillatim tres vel plures terminos hujus progreſſionis Arithmeticæ*, 3, 2, 1, 0, -1, -2, *ac terminos totidem reſultantes una cum omnibus eorum diviſoribus ſtatue è regione correſpondentium terminorum progreſſionis, poſitis diviſorum ſignis tam affirmativis quam negativis. Dein è regione etiam ſtatue progreſſiones arithmeticas quæ per omnium numerorum diviſores percurrunt pergentes à majoribus terminis ad minores eodem ordine quo termini progreſſionis* 3, 2, 1, 0, -1, -2 *pergunt, & quarum termini differunt vel unitate vel numero aliquo qui dividit altiſſimum terminum propoſitæ quantitatis.*

Siqua occurrit ejuſmodi progreſſio, iſte terminus ejus qui ſtat è regione termini o progreſſionis primæ, diviſus per differentiam terminorum, & cum ſigno ſuo annexus litteræ præfatæ, componet quantitatem per quam diviſio tentanda eſt.

3. Ut ſi quantitas ſit $x^3 - xx - 10x + 6$, pro x ſubſtituendo ſigillatim terminos progreſſionis 1. 0. - 1, orientur numeri - 4, 6, - 14 quos cum omnibus eorum diviſoribus colloco è regione terminorum progreſſionis 1. 0. - 1 hoc modo.

1	4	1.2.4.	+4.
0	6	1.2.3.6	+3.
—1	14	1.2.7.14	+2.

Dein quoniam altiſſimus terminus x^3 per nullum numerum præter unitatem diviſibilis eſt, quæro in diviſoribus progreſſionem cujus termini differunt unitate, & à ſuperioribus ad inferiora pergendo decreſcunt perin-

inde ac termini progreſſionis lateralis 1.0.-1. Et hujuſmodi progreſſionem unicam tantum invenio nempe 4. 3. 2. cujus itaque terminum + 3 ſeligo qui ſtat è regione termini 0 progreſſionis primæ 1. 0. - 1, tentoque diviſionem per $x+3$. Et res ſuccedit, prodeunte $xx-4x+2$.

4. Rurſus ſi quantitas ſit $6y^4-y^3-21yy+3y+20$. Pro y ſubſtituo ſigillatim 2, 1, 0, -1, -2, & numeros reſultantes 30, 7, 20, 3, 34. cum omnibus eorum diviſoribus è regione colloco ut ſequitur.

2	30	1.2.3.5.6.10.15.30	+ 10.
1	7	1.7	+ 7.
0	20	1.2.4.5.10.20	+ 4.
—1	3	1.3	+ 1.
—2	34	1.2.17.34	— 2.

Et in diviſoribus hanc ſolam eſſe animadverto decreſcentem progreſſionem arithmeticam + 10, + 7, + 4, + 1, - 2. Hujus terminorum differentia 3 dividit altiſſimum quantita-

Digitized by Google

tis terminum $6y^4$. Quare terminum $+4$ qui ſtat è regione termini 0, diviſum per differentiam terminorum 3 adjungo literæ y, tentoque diviſionem per $y + \frac{4}{3}$ vel quod perinde eſt per $3y + 4$, & res ſuccedit prodeunte $2y^3 - 3yy - 3y + 5$.

5. Atque ita ſi quantitas ſit $24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140aa + 64a + 30$: operatio erit ut ſequitur.

2	42	1.2.3.6.7.14.21.42.	+3. +3. + 7
1	23	1.23.	+1. -1. + 1
0	30	1.2 3.5.6.10.15.30.	-1. -5. - 5
-1	297	1.3.9.11.27.33.99.297.	-3. -9. -11

Tres occurrunt hic progreſſiones quarum termini $-1. -5. -5$ diviſi per differentias terminorum 2. 4. 6, dant tres diviſores tentandos $a - \frac{1}{2}$, $a - \frac{5}{4}$ & $a - \frac{5}{6}$. Et diviſio per ultimum diviſorem $a - \frac{5}{6}$ ſeu $6a - 5$ ſuccedit prodeunte $4a^4 - 5a^3 + 4aa - 20a - 6$.

COMMENTARIUS

6. Ut Demonſtremus auctoris Methodo ne-

Digitized by Google

neceſſario detegi diviſorem ut $6a-5$, ponimus hunc notum eſſe. Si in diviſore hoc $6a-5$ pro a ſubſtituamus numerum quemcunque, Ex. cauſ. 2., erit numerus inde oriundus diviſor numeri, qui prodit ex ſubſtitutione ejuſdem numeri 2. in quantitate propoſita; nam a poteſt repræſentare numerum quemcunque & eundem in quantitate & diviſore deſignat.

Subſtituendo in hoc diviſore $6a-5$ ſucceſſive pro a numeros 2. 1. 0. −1. −2. &c. habemus Progreſſionem Arithmeticam, cujus termini habentur inter diviſores numerorum, qui dividendam exprimunt quantitatem, ſi ſucceſſive in hac pro a iidem numeri ſubſtituantur..

Hujus Progreſſionis differentia eſt 6; quæ differentia eſt diviſor numeri 24. aliter $6a$ non divideret $24a^5$, quod deſideratur dum ponimus $6a-5$ dividere quantitatem propoſitam. Datur ergo pro diviſore $6a-5$, in diviſioribus numeralibus, in auctore memoratis, Progreſſio Arithmetica, quæ habet proprietates quas exigit Auctor.

Terminus -5. reſpondet 0.; quia habetur ſubſtituendo 0. pro a.

7. Hæc demonſtratio poteſt ad ſingu-

 los

Digitized by Google

los diviſores quantitatis propoſitæ applicari; unde ſequitur omnes hac methodo detegi, quia ſinguli Progreſſionem ſibi reſpondentem habent. Cum vero non conſtet illas tantum detegi poſſe Progreſſiones, quæ diviſori cuidam reſpondent, obſervat auctor diviſionem per quantitatem detectam tentandam eſſe.

PERGIT NEWTONUS

8. Si nullus occurrit hac methodo diviſor, vel nullus qui dividit propoſitam quantitatem, concludendum erit quantitatem illam non admittere diviſorem unius dimenſionis. Poteſt tamen fortaſſe, ſi plurium ſit quam trium dimenſionum, diviſorem admittere duarum. Et ſi ita, diviſor ille inveſtigabitur hac methodo. *In quantitate illa pro litera ſubſtitue, ut ante, quatuor vel plures terminos progreſſionis hujus* 3. 2. 1. 0. - 1. - 2. - 3. *Diviſores omnes numerorum reſultantium ſigillatim adde & ſubduc quadratis correſpondentium terminorum progreſſio-*

ſionis illius ductis in diviſorem aliquem numeralem altiſſimi termini quantitatis propoſitæ, & ſummas differentiaſque è regione progreſſionis colloca. Dein progreſſiones omnes collaterales nota quæ per iſtas ſummas differentiaſque percurrunt. Sit $\mp$ C *terminus iſtiuſmodo progreſſionis qui ſtat è regione termini* o *progreſſionis primæ,* $\mp$ B *differentia quæ oritur ſubducendo* $\mp$ C *de termino proxime ſuperiori qui ſtat è regione termini* 1 *progreſſionis primæ,* A *prædictus termini altiſſimi diviſor numeralis, & l litera quæ in quantitate propoſita eſt; & erit* A $ll \pm$ B $l \pm$ C *diviſor tentandus.*

9. Ut ſi quantitas propoſita ſit $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6$, pro x ſcribo ſucceſſivè 3. 2. 1. 0, -1. -2. & prodeuntes numeros 39. 6. 1. -6. -21. -26, una cum eorum diviſoribus è regione diſpono, addoque & ſubduco diviſores terminis progreſſionis illius quadratis ductiſque in diviſorem numeralem termini x^4 qui unitas eſt, *videl.* terminis 9. 4. 1. 0. 1. 4, & ſummas

 mas

mas differentiaſque è latere pariter diſpono. Dein progreſſiones quæ in iiſdem obveniunt è latere etiam ſcribo, ut ſequitur.

3	39	1.3.13.39	9	-30.-4. 6. 8.10.12.22.48.	-4. 6.
2	6	1.2. 3. 6	4	- 2.1.2. 3. 5. 6. 7. 10.	-2. 3.
1	1	1.	1	0.2.	0. 0.
0	6	1.2. 3. 6	0	- 6.-3.- 2.- 1. 1. 2.3.6.	2.-3.
-1	21	1.3. 7.21	1	-20.-6.- 2.0.2. 4.8. 22.	4.-6.
-2	26	1.2.13.26	4	-22.-9.2. 3.5.6.17.30.	6.-9.

Harum progreſſionum terminos 2 & - 3 qui ſtant è regione termini 0 progreſſionis illius quæ in columna prima eſt, uſurpo ſucceſſive pro $\mp$ C, Differentias quæ oriuntur ſubducendo hos terminos de terminis ſuperioribus 0 & 0 nempe - 2 & + 3 uſurpo reſpectivè pro $\mp$ B. Unitatem item pro A; & x pro l. Et ſic pro $All \pm Bl \pm C$ habeo diviſores duos tentandos $xx + 2x - 2$ & $xx - 3x + 3$, per quorum utrumque res ſuccedit.

10. Rurſus ſi proponatur quantitas $3y^5 - 6y^4 + y^3 - 8yy - 14y + 14$, Operatio erit ut ſequitur. Primo rem tento addendo & ſubducendo diviſores

qua-

quadratis terminorum progreſſionis 2. 1. 0. 1 uſurpato 1 pro A, ſed res non ſuccedit. Quare pro A uſurpo 3,

3	170		27		7. 17
2	38	1.2.19.38	12	-26.-71.0.11.13.14.31.50.	7. 11
1	10	1.2. 5.10	3	- 7.-2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	-7. 5
0	14	1.2. 7.14	0	14.. 7. - 2. - 1. 1.2.7.14	-7. - 1
-1	10	1.2. 5.10	3	- 7.-2. 1. 2. 4. 5. 8.13.	-7. - 7
-2	190		12		-7. -13

alterum nempe termini altiſſimi $3y^5$ diviſorem numeralem, & quadratis iſtis multiplicatis per 3 hoc eſt numeris 12. 3. 0. 3. addo ſubducoque diviſores; & progreſſiones in terminis reſultantibus haſce duas invenio -7. -7. -7. -7. & 11. 5. - 1. - 7. Expeditionis gratia neglexeram diviſores extimorum numerorum 170 & 190. Quare continuatis progreſſionibus ſumo proximos earum hinc inde terminos, *videl.* - 7 & 17 ſuperius & -7, & - 13 inferius, ac tento ſi ſubductis his de numeris 27 ac 12 qui ſtant è regione in quarta columna differentiæ dividunt iſtos 170 & 190 qui ſtant è regione in columna ſe-

ſecunda. Et quidem differentia inter 27 & -7 id eſt 34 dividit 170 & differentia 12 & -7 id eſt 19 dividit 190. Item differentia inter 27 & 17 id eſt 10 dividit 170 ſed differentia inter 12 & -13 id eſt 25 non dividit 190. Quare poſteriorem progreſſionem rejicio. Juxta priorem $+$ C eſt -7, & $\mp$ B nihil; terminis progreſſionis nullam habentibus differentiam. Quare diviſor tentandus $All \pm Bl \pm C$, erit $3yy + 7$. Et diviſio ſuccedit, prodeunte $y^3 - 2yy - 2y + 2$.

COMMENTARIUS

Demonſtratio hujus Methodi à Demonſtratione præcedentis vix differt.

11. Sit in primo Exemplo (9.) $xx - 3x + 3$. Diviſor quantitatis propoſitæ $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6$.

Si Diviſor hic ex Quadrato xx ſubtrahatur, reliquum eſt $+3x - 3$. Si in hac quantitate pro x ſucceſſive ſubſtituamus 2. 1. 0. -1. -2. &c. habemus Progreſſionem Arithmeticam cujus differentia adſcendendo

eſt

Digitized by Google

eſt $+3$ & cujus terminus, quando o. ſubſtituitur eſt -3 Ex qua Progreſſione memoratus Diviſor per regulas Auctoris elicitur.

Subſtituendo in ipſa quantitate data pro x unum ex iiſdem numeris Ex. gr. 2. dabitur inter diviſores numeri ex ſubſtitutione provenientis, numerus oriundus ſubſtituendo 2. in diviſore $xx-3x+3$; & ſubtrahendo omnes memoratos diviſores ex quadrato numeri ſubſtituti 2., nempe 4., dabitur neceſſario, inter differentias detectas, numerus ille progreſſionis memoratæ qui eidem numero 2. reſpondet.

Ex his ſequitur Progreſſionem memoratam neceſſario dari, inter illos numeros inter quos Auctor ipſam quærendam dicit, diviſoreſque ſingulos quantitatis propoſitæ ſimilem dare progreſſionem.

Non modo Diviſores Numerales ex Quadratis numerorum ſubſtitutorum ſubtrahit auctor; ſed & etiam his eoſdem addit; quia hæc additio eſt ſubtractio Diviſoris negativi.

Ante additionem & ſubtractionem diviſorum, Quadratum numeri ſubſtituti multiplicandum dicit auctor per unum ex Diviſoribus numeralibus primi termini, ut in

Digitized by Google

in ſecundo Exemplo per 3., cujus operationis ratio manifeſta fit, ſi datam Demonſtrationem applicemus diviſori ejuſdem Exempli ſecundi $3yy+7$.

PERGIT NEWTONUS

12. Si nullus inveniri poteſt hoc pacto diviſor qui ſuccedit, concludendum eſt quantitatem propoſitam *non* admittere diviſorem duarum dimenſionum. Poſſet eadem methodus extendi ad inventionem diviſorum dimenſionum plurium, quærendo *in* prædictis ſummis differentiiſque progreſſiones non arithmeticas quidem ſed alias quaſdam quarum terminorum differentiæ primæ, ſecundæ, tertiæ, &c. ſunt in arithmetica progreſſione: at in his Tiro non eſt detinendus.

COMMENTARIUS

13. Neque tales detexiſſe Progreſſiones ſatis eſſet, nam quomodo ex his diviſores eliciantur, non ita facile apparet; ſolis e-

etiam Progreſſionibus Arithmeticis diviſores trium dimenſionum deteguntur.

14. Sit quantitas data, cujus diviſores trium dimenſionum quæruntur,

$$x^6 + 12x^3 + 4xx + 4x + 3.$$

Formo primam columnam ex novem aut decem terminis progreſſionis Arithmeticæ hujus

$$4.\ 3.\ 2.\ 1.\ 0.\ -1\ -2\ -3\ -4.$$

In ſecundam refero numeros oriundos ex ſubſtitutione horum in quantitate propoſita.

In Tertiam diviſores numerorum ſecundæ columnæ.

Hæc communia ſunt diviſoribus quarumcunque dimenſionum.

Quarta columna formatur ex cubis numerorum reſpondentium in prima, multipicatis per diviſorem quemdam numeralem primi termini quantitatis propoſitæ, quibus productis additur, aut ex quibus ſubtrahitur, numerus quicunque in tertia columna e regione o. poſitus.

Ex gr. cubos 64. 27. 8. 1. 0. -1. -8. -27. -64. multiplico per unitatem diviſorem unicum numeralem termini primi x^6.

1ᵃ.

1ª.	2ᵈᵃ.	3ª.	4ᵗᵃ.	5ᵗᵃ.	6ᵗᵃ.	
4.	4947.	——	67.	——	4.	
3.	1104.	——	30.	——	2.	6.
2.	187.	1.11.17.187. ——	11.	-88.-3 0.5.6.11.14.99. ——	0.-	3.6.
1.	24.	1.2.3.4.6.8.12.24.	4.	-20.-8.-4.-2.0.1.2.3.5.6.7.8.10.12.16.28.	- 2.-	2.6.
0.	3.	1.3. ——	3.	—— 0. ——	- 4.-	1 6.
-1.	8.	1.2 4.8. ——	2.	-6.-2.0.1.3.4 6.10. ——	- 6.-	0.6.
-2.	21.	1.3.7.21. ——	-5.	13.6.4.3. 2.1.-1. -8. ——	- 8.	1.6.
-3.	432.	——	-24.	——	- 10.	2.6.
-4.	3379.	——	-61.	——	- 12.	

Productis addo, aut ex his ſubtraho, numerum quemcunque ex his 1.3., qui in tertia columna ponuntur è regione o. primæ. Addendo 3. formo columnam qua in hoc exemplo utor, 67. 30. 11.4.3.2.-5.-24.-61.

Eodem modo tres haſce alias quartas columnas formare potuiſſem.

61.

61.24.5.-2.-3.-4.-11.-30.-67.
65.28.9.2.1.0.-7.-26.-63.
63.26.7.0.-1-2.-9.-28.-65.

Cum hiſce quatuor columnis quartis ſeparatim operationes ſequentes inſtituendæ ſunt, quas nos primæ ex his quatuor applicamus.

Ex ſingulis numeris quartæ columnæ ſubtraho, & his addo, diviſores reſpondentes in tertia columna, ſummaſque & differentias, diviſas per numerum reſpondentem in prima columna, & regione hujus, in quintam columnam refero.

Nullum autem ſcribo numerum è regione o. in prima columna, ſed concipio omnes numeros poſitivos & negativos in hac linea dari.

Satis erit quatuor aut quinque ſeligere numeros ex minoribus columnæ ſecundæ in formatione tertiæ & quintæ columnæ, relictis reliquis locis vacuis, ut in hoc noſtro exemplo.

Quæro nunc, percurrendo numeros quintæ columnæ, an non dentur progreſſiones Arithmeticæ. Tales quinque detego, quas in ſextam columnam refero; (tres tantum hic notantur) & examino an ſurſum & deorſum poſſint continuari, explorando an

Digitized by Google

harum termini darentur in lineis reſpondentibus quintæ columnæ, ſi hæc continuata foret; quo longam computationem vitamus, quæ in continuatione hujus quintæ columnæ deſideraretur.

15. Tentamina hæc fiunt operationibus, iis contrariis quibus quinta columna formatur. Si Progreſſio detecta - 2. -4. -6. -8. deſcendendo continuetur terminus, qui reſpondet -3. in prima columna *eſt* -10.; qui numerus in quinta columna deſideratur, ut poſſit progreſſio continuari. Sed ſi hic in hac quinta columna detur, & per -3. multiplicetur, productum 30. ſubtrahendo hoc ex numero reſpondente in quarta columna, dabit numerum tertiæ columnæ, id eſt diviſorem numeri reſpondentis in ſecunda. Idcirco ſi 6. exacte dividat 432. continuatio progreſſionis procedit, ſi non dividat exactè, interrumpitur progreſſio, & rejicienda eſt.

Satis eſt in paucis terminis continuationem tentare, ne operationes magis temporis deſiderent, quam ex hac progreſſione determinatio diviſoris, & hujus examen, ſingulæ enim progreſſiones diviſorem dant tentandum.

Con-

Continuatis progreſſionibus ſextæ columnæ, omnes exceptâ primâ interrumpuntur; ſola ergo hæc 4. 2. 0. – 2. – 4. &c. uſu venit.

16. Hujus ope ſequentibus regulis Diviſorem tentandum elicio.

1°. Multiplico x^3 per Diviſorem primi termini quantitatis propoſitæ, per quem multiplicavi cubos numerorum primæ columnæ ubi quartam formavi. Diviſor hic in noſtro exemplo eſt 1. & productum

$$x^3$$

eſt terminus primus Diviſoris.

2°. Differentia Progreſſionis adſcendendo eſt $+2$. Muto ſignum, &

$$-2xx$$

eſt terminus ſecundus Diviſoris.

3°. Terminus Progreſſionis è regione 0. in prima eſt -4. Muto ſignum, &

$$+4x$$

eſt terminus tertius Diviſoris.

4°. Tandem in formatione quartæ columnæ addidi 3. cubis numerorum primæ, &

$$+3$$

eſt ultimus terminus Diviſoris.

Eſt idcirco Diviſor tentandus

$$x^3 - 2xx + 4x + 3.$$

 Cum

Digitized by Google

Cum quo diviſio procedit.

Obſervandum in primo & ultimo termino ſigna ſervari, in mediis mutari.

DEMONSTRATIO.

17. Demonſtratio hujus methodi eodem fundamento nititur cum præcedentibus.

Subſtituendo in Diviſore quocunque quantitatis propoſitæ, ut $x^3 - 2xx + 4x + 3$, pro x numerum quemcunque; ut 2, habetur numerus qui exacte dividit numerum detectum ex ſubſtitutione *ejuſdem* numeri 2. in quantitate propoſita. *Diviſor* talis reperitur in tertia columna e regione numeri ſubſtituti, qui in prima columna datur.

Primus terminus Diviſoris eſt (cum agatur de Diviſore trium dimenſionum) x^3 multiplicatum per Diviſorem numeralem primi termini quantitatis datæ.

Ultimus terminus eſt Diviſor ultimi termini quantitatis propoſitæ, qui ergo in tertia columna datur e regione o. in prima. Si ponamus numeros qui hanc tertiam columnam formant etiam negativos dari.

Ex

Digitized by Google

Ex quibus deducimus quartam columnam continere ſummam primi & ultimi termini Diviſoris, in quo pro x ponitur numerus reſpondens in prima columna.

Sic columna noſtra quarta formatur ex tali ſubſtitutione in x^3+3.

Nullusque poteſt dari Diviſor cujus terminus primus cum ultimo non format aliquam columnam quartam; quarum numerus aliquando tantus eſt, ut eo methodus inutilis evadat, eſt enim 192. ſi primus terminus quantitatis propoſitæ multiplicetur per 24, & ultimus terminus ſit 60.

Si ex ſumma hac x^3+3. ſubtrahamus ipſum Diviſorem $x^3-2xx+4x+3$ reſtat mutatis ſignis ſumma ſecundi & tertii termini $2xx-4x$, facta Diviſione per x, Quotiens eſt $2x-4$. Et ex formatione quintæ columnæ clarum eſt hanc continere $2x-4$, ſubſtituendo pro x numerum reſpondentem in prima columna.

Clarum etiam eſt, ſucceſſivâ ſubſtitutione numerorum primæ columnæ, quantitatem hanc $2x-4$ formare Progreſſionem Arithmeticam, cujus differentia adſcendendo eſt 2 & numerus e regione 0. in prima columna eſt -4. clarum etiam eſt

nullum dari quantitatis propoſitæ Diviſorem, qui in aliqua columna ſexta, quarum tot dantur quot quartæ columnæ, non habet progreſſionem Arithmeticam, qua data ipſe Diviſor detegitur.

Quarta enim columna, qua utimur dat ſummam primi & ultimi termini, & progreſſio arithmetica reliquos duos indicat.

PERGIT NEWTONUS.

18. *Ubi in quantitate propoſita duæ ſunt literæ, & omnes ejus termini ad dimenſiones æquè altas aſcendunt; pro una iſtarum literarum pone unitatem, dein per regulas præcedentes quære diviſorem, ac diviſoris hujus comple deficientes dimenſiones reſtituendo literam illam pro unitate.*

Ut ſi quantitas ſit $6y^4 - cy^3 - 21ccyy + 3c^3y + 20c^4$ ubi termini omnes ſunt quatuor dimenſionum: pro c pono 1, quantitas evadit $6y^4 - y^3 - 21yy + 3y + 20$, cujus diviſor ut ſupra eſt $3y + 4$, & completa deficiente dimenſione poſterioris termini per di-

men-

menſionem c, fit $3y + 4c$ diviſor quæſitus. Ita ſi quantitas ſit $x^4 - bx^3 - 5bbxx + 12b^3x - 6b^4$: poſito 1 pro b, & quantitatis reſultantis $x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6$ invento diviſore $xx + 2x - 2$, compleo ejus deficientes dimenſiones per dimenſiones b, & ſic habeo diviſorem quæſitum $xx + 2bx - 2bb$.

COMMENTARIUS.

19. Clare patet in diviſore b deſiderari, & ibi tantum deſiderari ubi dimenſiones deficiunt; quare hæc alia demonſtratione non indigent.

PERGIT NEWTONUS.

20. Ubi in quantitate propoſita tres vel plures ſunt literæ & ejus termini omnes ad eaſdem dimenſiones adſcendunt; poteſt diviſor per præcedentes regulas inveniri:

COMMENTARIUS.

Exemplo patebit, quomodo operandum

 quan-

Digitized by Google

quando tres ſunt litteræ in quantitate propoſita.

21. Sit hæc

$$12x^5 - 10ax^4 \ 26aax^3 + 24a^3xx - 4a^3bx + 12a^4b$$
$$-9bx^4 + 12abx^3 - 8aabxx + 6aabbx + 32aab^3$$
$$+ 6bbx^3 - 8abbxx - 12ab^3x - 12b^5$$
$$-24b^3xx + 18b^4x$$

1°. Pro a & b ſubſtituo unitatem, & propoſita quantitas mutatur in hanc

$$12x^5 - 19x^4 - 8x^3 - 16xx + 8x + 32;$$

Cujus Diviſorem duarum Dimenſionum detego

$$4xx - x - 4.$$

2°. Pro a ſubſtituo o., pro b unitatem, & quantitas in hanc convertitur

$$12x^5 - 9x^4 + 6x^3 - 24xx + 18x - 12.$$

Cujus Diviſorem duarum Dimenſionum detego

$$4xx - 3x + 2.$$

3°. Pro a ſubſtituo 1., pro b, o., & habeo

$$12x^5 - 10x^4 - 26x^3 + 24xx;$$

quam divido per xx, & prodit

$$12x^3 - 10xx - 26x + 24;$$

Cujus Diviſorem duarum Dimenſionum detego

$$4xx + 2x - 6.$$

Habetur hic quærendo Diviſorem unius Di-

Dimenſionis $3x - 4.$, per quem facta diviſione prodit $4xx + 2x - 6.$

Tres hi Diviſores ſunt idem Diviſor quæſitus,

$$4xx - x - 4.$$
$$4xx - 3x + 2.$$
$$4xx + 2x - 6.$$

Hac de cauſa in ſingulis datur terminus ille, in quo x tantum datur ſine ulla alia litera, nempe

$$4xx.$$

In ſecundo Diviſore deficiunt termini omnes in quibus datur a; & omnes, in quibus datur b ſolum aut b cum x, habentur, pro 1. ſubſtituendo b, id eſt, ſi litterâ b dimenſiones compleantur; hi termini ergo ſunt,

$$-3bx + 2bb.$$

Eodem modo tertius Diviſor dat terminos in quibus a cum x, & a ſolum datur,

$$+2ax - 6aa.$$

Terminus Diviſoris in quo ab habetur, detegitur colligendo in unam ſummam terminos ultimos +2,-6, ſecundi & tertii Diviſoris, quam ſummam ſubtrahimus ex ultimo termino -4. primi Diviſoris, & per Reliquum ſervato ſigno multiplicamus ab, in hoc exemplo Reliquum eſt o. & indicat terminum

num hunc in Diviſore quæſito non haberi.

Ratio hujus ultimæ operationis eſt hæc, in primo Diviſore -4 indicat quoties *aa*, *bb*, & *ab*, ſimul habentur in Diviſore quæſito; quia *a* & *b* unitate repræſentantur; $+2$ indicat quoties *bb*, & -6 quoties *aa*, in eodem Diviſore contineantur; ergo ſubtrahendo $+2-6$ ex -4, habemus quoties detur *ab*.

Colligendo nunc in unam ſummam quantitates detectas, habemus Diviſorem quæſitum.

$$\begin{aligned}4xx - 3bx &+ 2bb \\ +2ax &- 6aa\end{aligned}$$

22. Quando varii Diviſores poſt ſingulas ſubſtitutiones deteguntur, illi comparandi ſunt qui eundem primum terminum habent, ut hoc clarum eſt.

Sed ſi plures dentur pro ſingulis ſubſtitutionibus qui eundem habeant primum terminum, ambagibus involvitur operatio.

Eadem hæc methodus quatuor quinque & pluribus litteris poteſt applicari.

23. Dentur ex. gr. litteræ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, Decem faciendæ erunt ſubſtitutiones, & illa ſola intacta relinquenda erit littera, juxta cujus dimenſiones ordinata eſt quantitas, ſit hæc *a*. ſubſtitutiones erunt

1.

1. $b=1.$ & $c=d=e=0.$
2. $c=1.$ & $b=d=e=0.$
3. $d=1.$ & $b=c=e=0.$
4. $e=1.$ & $b=c=d=0.$
5. $b=c=1.$ & $d=e=0.$
6. $b=d=1.$ & $c=e=0.$
7. $b=e=1.$ & $c=d=0.$
8. $c=d=1.$ & $b=e=0.$
9. $c=e=1.$ & $b=d=0.$
10. $d=e=1.$ & $b=c=0.$

Hiſce decem ſubſtitutionibus totidem deteguntur quantitates quarum diviſores quærendi, & decies idem Diviſor detegitur, & comparatione verus elicitur.

24. Si plures quantitas propoſita habeat diviſores, quæ eundem primum terminum habeat, pro alia litera ordinanda eſt quantitas.

PERGIT NEWTONUS.

25. Sed expeditius hoc modo Diviſor detegitur.

Quære omnes diviſores terminorum omnium in quibus literarum aliqua non eſt, item terminorum omnium in quibus alia aliqua literarum non eſt, pari-

riter & omnium in quibus tertia litera quartaque & quinta non eſt ſi tot ſunt literæ. Et ſic percurre omnes literas. Et è regione literarum colloca diviſores reſpectivè. Dein vide ſi in ſerie aliqua diviſorum per omnes literas pergente, partes omnes unicam tantum literam involventes tot vicibus reperiantur quot ſunt literæ una dempta in quantitate propoſita: & partes duas literas involventes tot vicibus quot ſunt literæ demptis duabus in eadem quantitate. Si ita eſt; partes iſtæ omnes ſub ſignis ſuis ſemel ſumptæ erunt diviſor quæſitus.

Ut ſi proponatur quantitas $12x^3 - 14bxx + 9cxx - 12bbx - 6bcx + 8ccx + 8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$; terminorum $8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$ in quibus non eſt x diviſores unius dimenſionis per præcedentes regulas inventi erunt $2b - 3c$ & $4b - 6c$: terminorum $12x^3 + 9cxx + 8ccx + 6c^3$ in quibus non eſt b, diviſor unicus $4x + 3c$: ac terminorum $12x^3 - 14bxx - 12bbx + 8b^3$

in

in quibus non eſt c, diviſores $2x-b$ & $4x-2b$. Hos Diviſores è regione literarum x, b, c, diſpono, ut hic vides.

x	$2b-3c.\ 4b-6c.$
b	$4x+3c.$
c	$2x-b.\ 4x-2b.$

Cum tres ſint literæ & diviſorum partes ſingulæ non niſi ſingulas literas involvant, in ſerie diviſorum debent partes illæ bis reperiri. At diviſorum $4b-6c$ & $2x-b$ partes $4b$, $6c$, $2x$, b non niſi ſemel occurrunt. Extra diviſorem illum cujus ſunt partes non reperiuntur. Quare diviſores illos negligo. Reſtant tantum tres diviſores $2b-3c.\ 4x+3c$ & $4x-2b$. Hi in ſerie ſunt per omnes literas x, b, c pergente, & eorum partes ſingulæ $2b.\ 3c.\ 4x.$ bis reperiuntur in ipſis ut oportuit, idque cum ſignis iiſdem, ſi modò ſigna diviſoris $2b-3c$ mutentur, & ejus loco ſcribatur $-2b+3c$. Nam ſigna diviſoris cujuſvis mutare licet. Sumo itaque horum partes omnes $2b.\ 3c.\ 4x$ ſemel

mel ſub ſignis ſuis, & aggregatum $-2b + 3c + 4x$ diviſor erit quem invenire oportuit. Nam ſi per hunc dividas quantitatem propoſitam prodibit $3xx - 2bx + 2cc - 4bb$.

Rurſus ſi quantitas ſit $12x^5 - 10ax^4 - 9bx^4 - 26aax^3 + 12abx^3 + 6bbx^3 + 24a^3xx - 8aabxx - 8abbxx - 24b^3xx - 4a^3bx + 6aabbx - 12ab^3x + 18b^4x + 12a^4b + 32aab^3 - 12b^5$; diviſores terminorum in quibus x non eſt colloco è regione x; illos terminorum in quibus a non eſt, è regione a; & illos terminorum in quibus b non eſt, è regione b, ut hic vides.

x	$b. 2b. 4b. aa + 3bb. 2aa + 6bb. 4aa + 12bb.$ $bb - 3aa. 2bb - 6aa. 4bb - 12aa$
a	$4xx - 3bx + 2bb. 12xx - 9bx + 6bb.$
b	$x. 2x. 3x. - 4a. 6x - 8a. 3xx - 4ax. 6xx - 8ax.$ $2xx + ax - 3aa. 4xx + 2ax - 6aa$

Dein illos omnes qui ſunt unius dimenſionis rejiciendos eſſe ſentio, quia ſimplices $b. 2b. 4b. x. 2x$, & partes compoſitorum $3x - 4a. 6x - 8a$, non niſi ſemel in omnibus diviſoribus reperiantur; tres autem ſunt lite-

Digitized by Google

ræ in quantitate propoſita, & partes illæ unicam tantum involvunt, atque adeo bis reperiri deberent. Similiter diviſores duarum dimenſionum $aa + 3bb$. $2aa + 6bb$. $4aa + 12bb$. $bb - 3aa$ & $4bb - 12aa$ rejicio, quia partes eorum aa. $2aa$. $4aa$., bb & $4bb$ unicam tantum literam a vel b involventes non niſi ſemel reperiuntur. Diviſoris autem $2bb - 6aa$, qui ſolus reſtat è regione x, partes $2bb$ & $6aa$ quæ ſimiliter unicam tantum literam involvunt, iterum reperiuntur, nempe pars $2bb$ in diviſore $4xx - 3bx + 2bb$ & pars $6aa$ in diviſore $4xx + 2ax - 6aa$. Quin etiam hi tres diviſores in ſerie ſunt, ſtantes è regione trium literarum x, a, b; & omnes eorum partes $2bb$, $6aa$, $4xx$ quæ unicam tantum literam involvunt bis reperiuntur in ipſis, idque ſub propriis ſignis; partes vero $3bx$, $2ax$ quæ duas literas involvunt non niſi ſemel occurrunt in ipſis. Quare horum trium diviſorum partes omnes diverſæ

$2bb$

Digitized by Google

$2bb$, $6aa$, $4xx$, $3bx$, $2ax$ ſub ſignis ſuis connexæ, diviſorem deſideratum $2bb - 6aa + 4xx - 3bx + 2ax$ conflabunt. Per hunc itaque divido quantitatem propoſitam & oritur $3x^3 - 4axx - 2aab - 6b^3$.

COMMENTARIUS.

Methodi hujus Demonſtratio facilis eſt.

26. Sit quantitatis propoſitæ Diviſor

$$4xx - 3bx + 2bb$$
$$+ 2ax - 6aa.$$

Auctor ſucceſſive pro ſingulis litteris ſubſtituit o., dum rejicit quantitates in quibus littera datur, quo diviſor ſervatur, ſublatis illis quantitatibus in quibus illa littera habetur pro qua o. ſubſtituit.

Diviſor hic ergo, ſublato x, mutatur in hunc

$$+ 2bb - 6aa$$

qui eſt Diviſor quantitatis propoſitæ ex qua x etiam tollitur, id eſt, eſt diviſor illius partis quantitatis propoſitæ in qua x non datur.

Sublato b, diviſor eſt

$$4xx + 2ax - 6aa.$$

Sublato a, eſt

$4xx - 3bx + 2bb.$

Qui Diviſores neceſſario dantur inter Diviſores quo auctor utitur.

Clarum etiam eſt tot dari Diviſores quot dantur litteræ, id eſt, toties eundem Diviſorem repeti.

In qua repetitione quantitates quæ unicam continent litteram neceſſario in omnibus dantur, excepto illo unico in quo pro littera hac ponitur o. Quantitates quæ duas continent litteras in omnibus habentur, exceptis illis duobus in quibus pro una ex his literis o. ſubſtituitur.

Unde manifeſtum eſt Auctorem ſua methodo omnes detegere quantitates diviſoris quæſiti.

29. Si plures dentur Diviſores ejuſdem dimenſionis, ſeparandæ ſunt ſeries diviſorum, quæ percurruntur, & ſingulæ diviſorem unum dabunt.

Pauca quæ de hac materia in auctore ſuperſunt, & hîc adjiciuntur, non indigent commentario.

Pergit Newtonus

30. *Si quantitatis alicujus termini omnes non ſunt æque alti, complendæ ſunt*

O di-

dimenſiones deficientes per dimenſiones literæ cujuſvis aſſumptæ, dein per præcedentes regulas invento diviſore, litera aſſumpta delenda eſt. Ut ſi quantitas ſit $12x^3 - 14bxx + 9xx - 12bbx - 6bx + 8x + 8b^3 - 12bb - 4b + 6$: aſſume literam quamvis c, & per dimenſiones ejus comple dimenſiones quantitatis propoſitæ ad hunc modum $12x^3 - 14bxx + 9cxx - 12bbx - 6bcx + 8ccx + 8b^3 - 12bbc - 4bcc + 6c^3$. Dein hujus diviſore $4x - 2b + 3c$ invento, dele c, & habebitur diviſor deſideratus $4x - 2b + 3$.

31. Aliquando diviſores facilius quam per has regulas inveniri poſſunt. Ut ſi litera aliqua in quantitate propoſita ſit unius tantum dimenſionis; quærendus erit maximus communis diviſor terminorum in quibus litera illa reperitur, & reliquorum terminorum in quibus non reperitur, nam diviſor ille totam dividet. Et ſi nullus eſt ejuſmodi communis diviſor, nullus erit diviſor totius. Exempli gra-

gratia, ſi proponatur quantitas $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x + cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c - 8a^4$; quæratur communis diviſor terminorum $+ cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c$ in quibus c unius eſt tantum dimenſionis, & terminorum reliquorum $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4$ ac diviſor ille nempe $xx + 2ax - 2aa$ dividet totam quantitatem.

NEWTONI ARITHMETICA UNIVERSALIS

Pag. 59.

REGULA EXTRAHENDI ALTIORES RADICES EX QUANTITATIBUS NUMERALIBUS DUARUM POTENTIA COMMENSURABILIUM PARTIUM.

32. *Sit quantitas* A ± B. *Ejus pars major* A. *Index radicis extrahendæ* c. *Quære minimum numerum* n *cujus poteſtas* n^c *dividitur per* AA - BB *ſine reſiduo, & ſit quotus* Q. *Computa*

$\sqrt[c]{\overline{A+B}\times\sqrt{Q}}$ *in numeris integris proximis. Sit illud r. Divide A* $\sqrt{Q}$ *per maximum diviſorem rationalem: Sit quotus s, ſitque* $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ *in numeris integris proximis t. Et erit* $\frac{ts+\sqrt{ttss-n}}{\sqrt[2c]{Q}}$ *radix quæſita, ſi modo radix extrahi poteſt.*

33. Ut ſi radix cubica extrahenda ſit ex $\sqrt{968}+25$; erit $AA-BB=343$; ejus diviſores 7, 7, 7; ergo $n=7$ & $Q=1$. Porro $\overline{A+B}\times\sqrt{Q}$ ſeu $\sqrt{968}+25$, extracta prioris partis radice, fit paulo major quam 56: ejus radix cubica in numeris proximis eſt 4. Ergo $r=4$. Inſuper A $\sqrt{Q}$ ſeu $\sqrt{968}$ extrahendo quicquid rationale eſt fit $22\sqrt{2}$. Ergo $\sqrt{2}$ ejus pars radicalis eſt s, & $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ ſeu $\frac{5\frac{3}{4}}{2\sqrt{2}}$ in numeris integris proximis eſt 2. Ergo $t=2$. Denique ts eſt $2\sqrt{2}$, $\sqrt{ttss-n}$ eſt

eſt 1 & $\sqrt[2c]{Q}$ ſeu $\sqrt[6]{1}$ eſt 1. Ergo $2\sqrt{2} + 1$ eſt radix quæſita ſi modo radix extrahi queat. Tento itaque per multiplicationem ſi cubus ipſius $2\sqrt{2} + 1$ ſit $\sqrt{968} + 25$ & res ſuccedit.

34. Rurſus ſi radix cubica extrahenda ſit ex $68 - \sqrt{4374}$; erit $AA - BB = 250$, Cujus diviſores ſunt 5, 5, 5, 2. Ergo $n = 5 \times 2 = 10$, & $Q = 4$. Et $\sqrt[c]{\overline{A+B}} \times \sqrt{Q}$ ſeu $\sqrt[3]{\overline{68 + \sqrt{4374}}} \times 2$ in numeris proximis integris eſt $7 = r$. Inſuper $A\sqrt{Q}$ ſeu $68\sqrt{4}$ extrahendo quicquid rationale eſt fit $136\sqrt{1}$. Ergo $s = 1$, & $\frac{r + \frac{n}{r}}{2s}$ ſeu $\frac{7 + \frac{10}{7}}{2}$ in numeris integris proximis eſt $4 = t$: Ergo $ts = 4$, $\sqrt{ttss - n} = \sqrt{6}$ & $\sqrt[2c]{Q} = \sqrt[6]{4}$ ſeu $\sqrt[3]{2}$ atque adeo radix tentanda $\frac{4 - \sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Digitized by Google

35. Iterum ſi radix quadrato-cubica extrahenda ſit ex $29\sqrt{6} + 41\sqrt{3}$; erit $AA - BB = 3$, adeoque $n = 3$, $Q = 81$, $r = 5$, $s = \sqrt{6}$, $t = 1$. $ts = \sqrt{6}$, $\sqrt{ttss - n} = \sqrt{3}$ & $\sqrt[20]{Q} = \sqrt[10]{81}$ ſeu $\sqrt[5]{9}$ atque adeo radix tentanda $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$.

36. Cæterum in hujuſmodi operationibus ſi quantitas fractio ſit vel partes ejus communem habent diviſorem; radices denominatoris, & factorum ſeorſim extrahe. Ut ſi ex $\sqrt{242} - 12\frac{1}{2}$ radix cubica extrahenda ſit; hoc, reductis partibus ad communem denominatorem, fiet $\frac{\sqrt{968} - 25}{2}$. Dein extracta ſeorſim numeratoris ac denominatoris radice cubica orietur $\frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt[3]{2}}$.

37. Rurſus ſi ex $\sqrt[3]{3993} + \sqrt[6]{17578125}$ radix aliqua extrahenda ſit;

Digitized by Google

ſit; divide partes per communem diviſorem $\sqrt[3]{3}$, & emerget $11+\sqrt{125}$. Unde quantitas propoſita valet $\sqrt[3]{3}$ in $\overline{11+\sqrt{125}}$, cujus radix invenietur extrahendo ſeorſim radicem factoris utriuſque $\sqrt[3]{3}$ & $11+\sqrt{125}$.

COMMENTARIUS

Methodus hæc in praxi facilior eſt aliis, quæ apud ſcriptores habentur; & magis univerſalis eſt illâ, quam Franciſcus van Schooten pro extrahendis Radicibus ex Binomiis tradidit, & pro Radice cubica demonſtravit ad calcem commentariorum in Carteſii Geometriam.

Hæc autem Newtoni Methodus aliâ Demonſtratione indiget, cum tantum parti Methodi Newtonianæ Schoteni Demonſtratio applicari poſſit.

LEMMA I.

38. *Si ad Poteſtatem quamcunque, cujus Index eſt* c *elevetur Binomium* a + b *&* *poteſtatis hujus termini, alternatim ſumti,*

id eſt, 1us. 3us. 5us. 7us. &c. & 2^{dus}. 4^{tus}. 6^{tus}. 8us. &c. *in unam ſummam colligantur, & ita integra poteſtas in duas partes ſecetur, differentia quadratorum partium erit* $aa - bb$.

Per analogiam operationum hoc fit manifeſtum; quare inutile foret in quærenda longa univerſali demonſtratione hærere.

Quadratum radicis $a \pm b$ eſt

$$aa \pm 2ab + bb,$$

& partes ſunt

$$aa + bb$$
$$\pm 2ab$$

Quarum differentia Quadratorum *eſt* Quadratum radicis $aa - bb$.

Cubi $a \pm b$ partes ſunt

$$a^3 + 3abb$$
$$\pm 3a^2b \pm b^3$$

Quadratorum differentia eſt cubus radicis $aa - bb$

Hæc patent operationes inſtituendo, & ſi quis circa quaſdam alias Poteſtates operationes continuaverit, facile percipet eandem propoſitionem neceſſario in omnibus locum habere.

Digitized by Google

LEMMA 2.

39. *Si* a *&* b *numeri fuerint, quorum* a *eſt major, & Binomium* $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ *elevetur ad Poteſtatem* c, *numeruſque hic fuerit impar, Poteſtas hæc erit Binomium cujus membrum unum multiplicatur per* $\sqrt{a}$ *& alterum per* $\sqrt{b}$, *& erunt membra hæc partes memoratæ in lem.* 1. *quarum major eſt illa quæ per* $\sqrt{a}$ *multiplicatur.*

Cum c ſit numerus impar, $c - 1$ eſt par, poteſtque in duas partes ſecari, pono idcirco $2n = c - 1$.

Si nunc Binomium datum elevemus, ad poteſtatem quamcunque, cujus index eſt numerus impar c, videbimus ſtatim terminos hos eſſe, neglectis Signis & Coëficientibus,
$a^n\sqrt{a}, a^n\sqrt{b}, a^{n-1}b\sqrt{a}, a^{n-1}b\sqrt{b}, a^{n-2}b^2\sqrt{a}, a^{n-2}b^2\sqrt{b}$. &c.

Collectis in unam ſummam terminis, 1. 3. 5. &c. habemus numerum rationalem multiplicatum per $\sqrt{a}$; & ſumma terminorum, 2. 4. 6. &c. eſt numerus rationalis qui multiplicatur per $\sqrt{b}$.

Si etiam pro Poteſtate quacunque operationem inſtituamus videbimus ſummas

 has

has conſtare ex terminis reſpondentibus quæ in eo ſolo differunt, quod ubi *a* in uno datur *b* reperitur in altero; quare, propter majorem *a*, ille terminus qui habet *a*, ubi alter habet *b*, ideſt terminus qui per $\sqrt{a}$ multiplicatur alterum ſuperabit.

CORROLARIUM

40. Si membrorum Radicis unum $\sqrt{a}$, aut $\sqrt{b}$, ſit rationale, & rationale erit illud membrum Poteſtatis quod per rationalem partem Radicis multiplicatur, eritque rationale membrum Poteſtatis altero majus, ſi rationalis terminus Radicis alterum ſuperet.

LEMMA 3.

41. *Si iiſdem poſitis numerus* c *fuerit par, Poteſtas format Binomium, cujus membrum unum rationale eſt, alterum multiplicatur per* $\sqrt{ab}$. *Sunt etiam membra partes de quibus agitur in lem.* 1.

Termini enim Poteſtatis ſunt, ſi $2m = c$, (in quo caſu *m* eſt numerus integer) neglectis ſignis & coëficientibus,

1.	3.	5.	7.
a^m,	$a^{m-1}b$,	$a^{m-2}bb$,	$a^{m-3}b^3$,

a^{m-1}

2. 4. 6.
$a^{m-1}\sqrt{ab}$, $a^{m-2}b\sqrt{ab}$, $a^{m-3}bb\sqrt{ab}$;
ut hoc patebit ſi operatio pro Poteſtate quacunque cujus index eſt numerus par inſtituatur.

CORROLARIUM

42. Si terminus unus Radicis $\sqrt{a}$ aut $\sqrt{b}$ fuerit rationalis, membrum Poteſtatis irrationale per eandem irrationalem quantitatem multiplicatur quæ irrationalem Radicis multiplicat. Sit Ex. gr. $a = ee$ erit nunc terminus $\sqrt{a} = e$ rationalis & $\sqrt{ab} = e\sqrt{b}$, & $\sqrt{b}$ irrationalis eſt quantitas quæ membrum irrationale Poteſtatis multiplicat.

LEMMA 4.

43. *Poteſtas quæcunque Binomii numeralis* $\sqrt{\text{a}} + \sqrt{\text{b}}$ *habet ambo membra poſitiva; Binomii, ſive Apotomes,* $\sqrt{\text{a}} - \sqrt{\text{b}}$ *Poteſtas membrum unum negativum habet; ipſa vero membra non differunt ſive detur* $+\sqrt{\text{b}}$, *ſive* $-\sqrt{\text{b}}$.

Hoc ex formatione Poteſtatum ſequi illi patebit, qui Poteſtates aliquas formaverit.

LEM-

Digitized by Google

LEMMA 5.

44. *Si Binomium* $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ *elevetur ad Poteſtatem, cujus Index eſt* c, *differentia Quadratorum membrorum Poteſtatis eſt* $\overline{a-b}^{\,c}$.

Sequitur hoc ex collatione lem. 2. & 3. cum lem. 1.

LEMMA 6.

45. *Non poteſt ex Binomio extrahi Radix cujus Index eſt* c, *id eſt* $\sqrt[c]{}$, *niſi differentia Quadratorum partium Binomii dati habeat* $\sqrt[c]{}$ *rationalem.*

Radix, ſi poſſit exprimi, continet tantum Radices quadratas, ut hoc ſequitur ex lem. 2. & 3. quia tales tantum Radices in ipſa Poteſtate continentur.

Ponamus nunc Radicem Binomii dati poſſe exprimi, & ſit hæc $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. Differentia Quadratorum partium Binomii dati erit $\overline{a-b}^{\,c}$ (44), cujus $\sqrt[c]{}$ eſt $a - b$, quæ quantitas rationalis eſt; quod ergo ſemper contingit ubi radix exprimi poteſt.

LEM-

Lemma 7.

46. *Si duæ, Geometrice decreſcentes Proportiones continuæ, habeant communem terminum medium, major inter primos, quam inter ultimos progreſſionum terminos datur differentia*

Sint progreſſiones

$$\div A, B, C$$
$$\div D, B, E$$

Ergo $A \times C = B \times B = D \times E$; &

$$A, D :: E, C$$

Divid. & altern.

$$A - D, E - C :: D, C$$

ſed quia proportiones decreſcunt D ſuperat B quæ major eſt C; ergo D excedit C, & A - D differentia primorum terminorum, ſuperat E - C differentiam ultimorum.

Lemma 8.

47. *Non poteſt ex Binomio extrahi* $\sqrt[c]{}$, *ſi* c *fuerit par, niſi membrum majus Binomii dati ſit rationale.*

Si $\sqrt[o]{}$ poteſt extrahi, poteſt & Radix qua-

Digitized by Google

quadrata ex Binomio dato extrahi; eſt enim hæc ipſa $\sqrt[c]{}$, elevata ad Poteſtatem $\frac{1}{2}c$, qui Index eſt numerus integer, cum c ſit par. Sit Radix hæc quadrata Binomii dati Binomium $a \pm b$, cujus Quadratum $aa + bb \pm 2ab$ eſt Binomium propoſitum.

Radix $a \pm b$ etiam continet tantum radices quadratas (39. 41.); quare $aa + bb$ eſt membrum rationale Binomii dati propoſiti, & $2ab$ membrum irrationale.

Demonſtrandum ergo $aa + bb$ ſemper ſuperare $2ab$; nam inde conſtabit Radicem non poſſe extrahi niſi rationale membrum majus fuerit.

Non ſunt æquales a & b, ſi enim tales forent quantitas propoſita foret aut monomium rationale $2aa + 2bb$, aut o.

Ponamus ergo a & b inæquales. Clarum eſt aa, ab :: ab, bb, ideo $aa + bb$ ſuperat $2ab$ juxta prop. 25. lib. v. El. Eucl.

METHODI AUCTORIS DEMONSTRATIO.

48. Binomium datum eſt $A \pm B$; n detegitur, & Q determinatur ita, ut $AAQ - BBQ = n^c$.

Non

Digitized by Google

Non Binomii dati; ſed hujus $A\sqrt{Q} \pm B\sqrt{Q}$ Radicem quærit auctor, & ubi hanc detectam habet, ipſam dividit per $\sqrt[c]{}$ ipſius $\sqrt{Q}$, id eſt per $\sqrt[2c]{Q}$, ut habeat Radicem Binomii dati $A \pm B$.

Præparatione hac Binomium acquirit conditiones, ſine quibus ipſius Radix exprimi non poſſet, (45.); eſt nunc n^c differentia Quadratorum membrorum $A\sqrt{Q}$ & $B\sqrt{Q}$, ex qua ſi $\sqrt[c]{}$ extrahatur habemus rationalem numerum n.

Ponamus $x\sqrt{y} \pm \sqrt{z}$ exprimere Radicem quæſitam Binomii $A\sqrt{Q} \pm B\sqrt{Q}$; & $x\sqrt{y}$ eſſe partem majorem. Cum in hiſce de Fractionibus non agatur, de quibus auctor ſeparatim tractat, erunt x, y, z, numeri integri; nam cum in Poteſtate propoſita non dentur fractiones neque in Radice dantur.

Differentia quadratorum membrorum Binomii $x\sqrt{y} \pm \sqrt{z}$ elevati ad Poteſtatem c, id eſt differentia quadratorum $A\sqrt{Q}$ & $B\sqrt{Q}$ eſt $\overline{xxy-z}^{\,c}$ (44). Ergo

$$\overline{xxy-z}^{\,c} = AAQ - BBQ = n^c$$

&

&

$$xxy - z = n$$

Ex hac æquatione deducimus decreſcentem proportionem.

$$\div\!\div\; x\sqrt{y}+\sqrt{z},\; \sqrt{n},\; x\sqrt{y}-\sqrt{z}.$$

Decreſcit etiam hæc alia

$$\div\!\div\; r,\; \sqrt{n},\; \frac{n}{r}.$$

Nam r ſuperare $\sqrt{n}$ demonſtramus. In prima proportione differentia inter primum & tertium terminum eſt $2\sqrt{z}$, id eſt, non minor eſt duobus. Quia proportio decreſcit differentia inter primum & ſecundum terminum ſuperat ſemiſſem differentiæ inter primum & tertium, id eſt $x\sqrt{y}+\sqrt{z}$ & $\sqrt{n}$ plusquam unitate differunt, ſed r cum $x\sqrt{y}+\sqrt{z}$ nondiffert $\frac{1}{2}$, dum in numerisintegrisproximishancquantitatem exprimit (32. 43.); ergo r minus quam $\sqrt{n}$ differt cum quantitate, quæ hac ultima major eſt, quare r neceſſario ſuperat $\sqrt{n}$.

Differentia inter r, &Radicem $x\sqrt{y}+\sqrt{z}$, ut vidimus eſt minor $\frac{1}{2}$, minor ergo $\frac{1}{2}$ etiam eſt differentia inter $x\sqrt{y}-\sqrt{z}$ & $\frac{n}{r}$ (46).

In duabus etiam, quas conſideramus, proportionibus ſi $x\sqrt{y}+\sqrt{z}$ ſuperat numerum

r,

r, $\frac{n}{r}$ major eſt quantitate $x\surd y - \surd z$; ſi ergo colligamus in unam ſummam $x\surd y + \surd z$, $x\surd y - \surd z$, ut & r, $\frac{n}{r}$ ſummarum $2x\surd y$, $r + \frac{n}{r}$, differentia etiam minor erit $\frac{1}{2}$; in hoc enim caſu minuitur differentia, quia una aliam corrigit.

Ergo differentia inter $\frac{r + \frac{n}{r}}{2}$ & $x\surd y$ membrum maximum Radicis minor eſt $\frac{1}{4}$

His poſitis quatuor caſus examinandi ſunt; nam $A\surd Q$, eſt aut rationalis aut ſurda, & in utroque caſu c eſt par aut impar.

49. Cas. i. Rationalis eſt quantitas $A\surd Q$, & c impar.

In hoc caſu $x\surd y$ pars major Radicis eſt rationalis (40.), eſt ergo numerus integer; non enim hic, ut jam monuimus, agitur de Fractionibus; Idcirco $\frac{r + \frac{n}{r}}{2}$ eſt ipſum membrum maximum Radicis; nam numeri integri ad minimum unitate differunt, & quantitas hæc non $\frac{1}{4}$ differt cum membro maximo.

In hoc caſu etiam $s = 1$.; & ideo

$\frac{r+\frac{n}{r}}{2} = \frac{r+\frac{n}{r}}{2s} = t = ts$, & membrum maximum bene per reg. auctoris determinatum eſt.

50. CAS. 2. Irrationalis eſt quantitas $A\sqrt{Q}$ & numerus c impar.

Eſt nunc $x\sqrt{y}$ numerus ſurdus, & quantitas $A\sqrt{Q}$ ad minimos terminos reducta eandem radicalem habet cum $x\sqrt{y}$ (39.). Radicalem hanc auctor quærit & vocat s; ergo $s = \sqrt{y}$.

Vidimus $\frac{r+\frac{n}{r}}{2}$ cum $x\sqrt{y}$ non differre $\frac{1}{4}$; minus differunt ſi per s, aut $\sqrt{y}$, dividantur; quia quantitas hæc ſuperat unitatem. Idcirco $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ & x minus differunt $\frac{1}{4}$; & ideo x eſt numerus integer proximus ipſi $\frac{r+\frac{n}{r}}{2s}$ ideſt $t = x$.

Sed jam habuimus $s = \sqrt{y}$; ergo $ts = x\sqrt{y}$, & bene radicis membrum primum fuit determinatum.

51. CAS. 3. Rationalis eſt quantitas $A\sqrt{Q}$ & c numerus par.

In

In hoc caſu; non ut in *cas.* 1. conſtat $x\sqrt{y}$ eſſe rationale (41.), ideo caſus hic 3[us]. in duos ſubdividitur.

Quando $x\sqrt{y}$ eſt rationale demonſtratio *cas.* 1. locum habet, & detegitur pars major radicis.

Si vero $x\sqrt{y}$ ſit ſurda quantitas, methodus ad veram radicem non conducit; nam propter rationalem $A\sqrt{Q}$, ſemper $s = 1$ & non $\sqrt{y}$ quod deſideratur ut in *caſu* 2. demonſtravimus. Vide ſubjuncta corr. 2. & 3.

52. Cas. 4. Irrationalis eſt quantitas $A\sqrt{Q}$, & c numerus par.

Ex hac Quantitate Radix quæſita non poteſt extrahi (47.), & innutile foret Auctoris regulam, aut aliam quamcunque, tali quantitati applicare.

53. Dato nunc $x\sqrt{y}$ maximo membro Radicis æquale ts, demonſtramus $\sqrt{z} = \sqrt{ttss - n}$. id eſt $z = ttss - n$.

Habemus

$$x\sqrt{y} = ts.$$
$$xxy = ttss.$$

Sed ut ſuperius vidimus

$$xxy - z = n.$$

Ergo ſubtrahendo Æquationem ultimam ex præcedenti

$$xxy - xxy + z = z = ttss - n.$$

 Quod

Digitized by Google

Quod demonſtrandum erat.

Eodem ſigno radicis membra jungenda eſſe, quo membra quantitatis profitæ junguntur clarum eſt (43.).

Radicem detectam tentandam eſſe dicit auctor, quia Demonſtratio ponit, Radicem poſſe exprimi per $x\sqrt{y} \pm \sqrt{z}$, & ideo locum tantum habet quando Radix extrahi poteſt; ſed minime ex demonſtratione ſequitur ſemper poſſe.

Ex Demonſtratis ſequentia deducimus corrolaria, quibus methodus auctoris illuſtratur.

CORROLARIUM I.

54. *Quando* c *eſt numerus impar, ſemper Methodus auctoris conducit ad veram Radicem, quando hæc extrahi poteſt.* (49. 50,).

CORROLARIUM 2.

55. *Quando* c *eſt par & Radix extrahi poteſt, detegitur hæc ſi alterutrum membrorum Radicis fuerit rationale.*

Conſtat hoc ex demonſtratis, ſi rationale fuerit membrum majus Radicis (51.); ſed ſi membrum hoc irrationale fuerit, detegitur Radix, ſi $B\sqrt{Q}$ adhibeatur in de-

Digitized by Google

detegendo s non $A\sqrt{Q}$; ut hoc patet hiſce caſibus applicando demonſtrata, conſtat enim in hoc caſu etiam eſſe $s = \sqrt{y}$. (42.).

Unde deducimus, cùm ante initam operationem non poſſimus prævidere utrum membrum Radicis rationale ſit majus an minus, ſi Radix per methodum auctoris detecta, quæ ſemper habebit majus membrum rationale non ſit vera, aliam quærendam eſſe in qua majus membrum ſit irrationale.

COROLLARIUM 3.

56. *Si nulla ex ambabus Radicibus in corr. præcedenti memoratis vera ſit, neque inde poterimus concludere Radicem extrahi non poſſe.*

Si enim membra ambo Radicis fuerint irrationalia $x\sqrt{y}$ & $\sqrt{z}$ erit tamen $A\sqrt{Q}$ rationale (47.) & $s = 1$. (49.), per Methodum auctoris. Si juxta obſervata in corr. præcedenti in ſubſidium vocemus $B\sqrt{Q}$ erit $s = \sqrt{yz}$ (41.) & non inficias ire poſſumus in hoc caſu fallere auctoris methodum, qui defectus tamen uſum ipſius methodi non minuit; ſi, ut in ſua methodo præſcribit *van Schooten*, extractione Radicis Quadratæ, per Methodum notiſſimam,

Digitized by Google

problema reducamus ad extractionem Radicis, cujus index eſt numerus impar.

CORROLARIUM 4.

57. *Quando index Radicis eſt numerus par & majus membrum Binomii propoſiti eſt irrationale, non poteſt Radix exprimi*, & non quærenda eſt, ut jam monuimus (52.).

FINIS.

Digitized by Google

DE
DETERMINANDA
FORMA
SERIEI INFINITÆ
ADSUMTÆ
METHODUS NOVA.

Digitized by Google

Digitized by Google

PRÆFATIO.

Ubi quantitas quæritur quæ exacte exprimi non poteſt, per Approximationem valor ipſius inveſtigatur, valorque hic, quantum ad praxin, plerumque cum vero valore æquiparatur.

Serierum infinitarum convergentium uſum in his Approximationibus nullum latet Mathematicum.

Inter varias Methodos quibus, datâ Æquatione, quantitatis cujuſcunque valor ſerie convergente exprimitur, non immerito, in multis occaſionibus, illa reliquis ante ponitur, in qua ſeries indeterminata adſumitur, quæ quantitati propoſitæ æqualis ponitur, & cujus poſtea termini quot libuerit determinantur

Varia circa haſce ſolutiones ſparſim apud auctores habentur, ſed de ipſa methodo explicanda parum ſolliciti videntur. Illi ipſi qui hanc exemplis explicare ſibi proponunt, notum ponunt

Digitized by Google

illud in quo ſolvendus latet nodus.

Sit ex. gr. determinanda y, *ex nota* x *in data Æquatione.*

Valorem ipſius y *adſumta ſerie indeterminatâ exprimunt, ponendo*
$y = Ax^n + Bx^{n-r} + Cx^{n-2r} + Dx^{n-3r}$ &c.

Explicatur quidem quomodo terminorum coëficientes A, B, C, D, *&c. determinentur, quod difficultatem nullam habet; pro* n *&* r, *quaſi ſponte paterent, valores adponuntur, quamvis in his detegendis omnis hæreat difficultas.*

Circa hos numeros varia quidem obſervat Reyneau, Anal. demontree art. 246. *Sed minime explicat qua regula numeri ipſi determinari queant.*

Newtonus; *cui tot & tanta debet Matheſis, determinationem demonſtravit numeri* n; *ſi nempe hîc applicemus quæ ille de inveſtigatione primi termini tradidit in explicatione Methodi aliûs de ſeriebus infinitis.*

De inveſtigatione numeri r *egit* Brook Tailor, *in tractatu* de Methodo Incremen-

mentorum Prop. 9; *Sed quam tradidit regulam hanc in quibuſdam occaſionibus fallere obſervavit* Jacobus Stirling *in tractatu* de Lineis tertii ordinis Newtonianis pag. 28. *qua occaſione ipſe aliam tradit* in quam ſe caſu incidiſſe *fatetur*, & ejus demonſtrationem poſtea fruſtra quæſiviſſe; quare illam eſſe ubique veram affirmare non audet.

Quo fundamento dubium hoc nitatur non video; ſed quamvis ipſius regulam nunquam fallere perſuaſum habeam, non tamen hanc omnibus partibus perfectam credo: quid vero in ipſa deſideretur dicam.

Computatio iniri poteſt, ubi numerus n *bene eſt determinatus, quamvis ſeriei adſumtæ vera ſeriei quæſitæ forma non tribuatur, ſi pro* r *diviſor hujus quicunque adhibeatur; id eſt, in eandem abſolutâ computatione incidimus ſeriem, ſi modo in ſerie adſumta contineatur vera ſeries.*

Ex. gr. Sit n = 3 *&* r = 4, *forma ſeriei eſt.*

y =

$y = Ax^3 + Bx^7 + Cx^{11} + Dx^{15} + \&c.$

Qua ſerie adſumta computatio iniri poteſt; ſed & hæ uſu venire poſſunt

$y = ax^3 + bx^5 + cx^7 + dx^9 + ex^{11} + \&c.$
$y = ax^3 + bx^4 + cx^5 + dx^6 + ex^7 + \&c.$

Quæ ſingulæ primam continent. Si nunc cum data Æquatione computationem ineamus, in ſecunda ſerie detegimus

$a = A, b = o, c = B, d = o, e = C \&c.$

In tertia habemus,

$a = A, b = o, c = o, d = o, e = B, \&c.$

Ita ut in hiſce tribus occaſionibus perveniamus ad eandem ſeriem quæ formam habet primæ harum trium.

Methodo Stirlingii ſæpiſſime non ad veram formam pervenimus, ſed ad ſeriem quæ veram continet; ita ut ad hanc niſi per ambages non perveniamus; quæ pro parte quidem vitari poſſunt, quærendo, ante initam computationem, veram formam ex data alia, quæ illam continet, quod quomodo peculiari regula fieri poteſt explicaremus, niſi in praxi

la-

labor multo minor eſſet, directe quærendo ipſam ſeriei quæſitæ formam.

Circa Tailoris *Methodum obſervandum hac ipſâ* Stirlingium *uti, corectâ tantum in illis occaſionibus ubi illam fallere contendit, circa quod obſervandum corectionem hanc non in omnibus occaſionibus neceſſariam eſſe ubi adhibetur.*

Sed quamvis Tailoris *methodus a* Stirlingio *correcta in omnibus occaſionibus ſufficiat, non tamen tironibus ingratum fore credidi, ſi ipſis viam demonſtrem, qua in multis occaſionibus ambages evitare poſſunt. noſtra enim Regula dat verum valorem ipſius* r, *quo ſeries adſumta ſtatim ſeriei quæſitæ formam acquirit. Ut autem hæc pluribus utilia ſint præmittam determinationem numeri* n *juxta methodum* Newtonianam, *quam in memorata nona prop. explicat* Tailor, *&* Stirling *in dicto tractatu prop.* 2. *ubi ipſis ſeriebus indeterminatis adſumtis hanc applicant.*

Non autem agam de determinatione coëficientium A, B, C, D. *&c. quia hoc*

hoc ſit methodo vulgo notâ, & in multis aliis occaſionibus uſitatâ.

DETERMINATIO FORMÆ SERIEI INFINITÆ, INDETERMINATÆ, ADSUMTÆ.

PROPOSITIO I.

Inveſtigatio Indicis primi termini Seriei.

Datur Æquatio in qua y quæritur, cujus valor per Poteſtates quantitatis x exprimi debent.

1. Pone y, æqualem ſeriei, infinitæ, indeterminatæ, adſumtæ,
$y = Ax^{n} + Bx^{n-r} + Cx^{n-2r} + Dx^{n-3r} + \&c.$
Determinandus eſt numerus n.

2. For-

2. Formetur parallelogrammum in Tab. IV. repræſentatum, cujus anguli notentur, ut videtur; patetque quomodo augeri & magis parallelogrammum extendi queat. TAB. IV.

3. In Æquatione propoſita pro y ſubſtitue x^n. Si differentiales dentur, pro differentia prima ipſius y pone x^{n-1}, pro ſecunda x^{n-2} & ſic de reliquis.

4. In Parallelogrammo nota omnes angulos in quibus dantur indices Poteſtatum quantitatis x in Æquatione.

Si Indices Fractiones contineant puncta notanda etiam deteguntur; $n+\frac{1}{2}$ in medio datur inter n & $n+1$; $\frac{3}{2}n$ collocatur in medio inter n & $2n$.

5. Duc lineam in parallelogrammo quæ per duo aut plura puncta notata tranſeat ita, ut omnia alia puncta notata ad eandem partem lineæ dentur; obſervando lineam nunquam ducendam eſſe juxta directionem linearum quæ ſurſum & deorſum tendunt, ut ſunt lineæ A B, C D, &c,

6. Pone omnes indices per quos linea tranſit æquales inter ſe, & determinabis n.

EXEMPLUM.

7. Sit Æquatio data.

x^3

Digitized by Google

$$x^3y^7 - a^5\frac{y^6}{x} - 6ba^2x^3y^4 + 3b^4x^2y^4 - d^7xy^2 - a^8x^2 = 0$$

Pro y ſubſtituo x^n (39.), & indices ſunt $7n+3$, $6n-1$, $4n+3$, $4n+2$, $2n+1$, 2.

Notatis his in parallelogrammo (4.), quatuor modis linea duci poteſt (5);

1. Per 2, $2n+1$, $6n-1$, & eſt $n = \frac{1}{2}$. (6).
2. Per $6n-1$, $7n+3$, & eſt $n = -4$. (6).
3. Per $7n+3$, $4n+3$, & eſt $n = 0$. (6).
4. Per $4n+3$, 2, & eſt $n = -\frac{1}{4}$. (6).

8. Si pro n in ſingulis indicibus valor ſubſtituatur, ſinguli illorum per quos linea tranſivit, qui æquales ſunt inter ſe, formant indicem aut omnium maximum, ut in duobus primis caſibus; aut omnium minimum ut in duobus ultimis.

9. Quando index hic eſt omnium maximus, in parallelogrammo puncta omnia notata reperiuntur infra lineam ductam, & ſeries eo citius convergit quo major eſt x.

10. Contrarium obtinet quando index memoratus eſt omnium minimus.

PROPOSITIO 2.

Determinatio differentiæ inter Indices duorum terminorum ſeſe mutuo immediate ſequentium in ſerie adſumta.

Digitized by Google

11. In Serie adſumta & ſuperius memorata (1.).

$y = Ax^{n} + Bx^{n+r} + Dx^{n+2r} + Ex^{n+3r} + \&c.$

Differentiam, de qua in hac propoſitione agitur, *r* exprimit.

12. Quære *n* per Propoſitionem præcedentem, & in Indicibus Poteſtatum *x* poſt ſubſtitutionem in n. 3. memoratam, pro *n* pone valorem.

13. Indices illi quos linea in parallelogrammo tetigit (5.), & qui æquales ſunt inter ſe, pro unico habentur; ſubtrahe hunc ex omnibus reliquis ſi his minor ſit, ſin ſecus alios ex ipſo ſubtrahe, & formabis *Seriem* quam dicimus *differentiarum*.

14. Harum differentiarum quære maximum Diviſorem communem.

15. Per hunc divide minimam ipſarum differentiarum, & Quotientem ſerva.

16. Quære valorem ipſius A, quod ubi *n* datur, fieri poteſt; & numerum valorum æqualium nota, ſi non varii æquales dentur, unitas ſaltem exprimet numerum valorum æqualium.

Si A habeat varios valores diverſos, numerum æqualium determinat ille qui adhibetur in computatione. Ex gr. ſi *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *c*, ſint ſex valores ipſius A, numerus

valorum æqualium erit 3. ſi pro A ubique ponamus a, numerus valorum æqualium erit 2. ſi b uſu veniat, tandem erit unum ſi c adhibeatur.

17. Quære minimum numerum qui exacte poſſit dividi per numerum valorum æqualium A & per Quotientem in n. 15. memoratum.

18. Per numerum hunc divide minimam in ſerie differentiarum (13.), & quotiens erit numerus quæſitus, id eſt r, qui negativus erit ſi ſeries eo citius convergat quo major eſt x (9.), poſitivus in alio caſu in n. 10. memorato.

19. *Tailor* quærit maximum Diviſorem communem ipſorum indicum; & hunc dividit *Stirling* per numerum valorum æqualium A.

Regula noſtra magis involuta apparet; ſed admodum minuit laborem: ut autem clarior evadat exemplis ipſam illuſtrabimus.

EXEMPLUM I.

Sit Æquatio data.

$$x^5 - 4y^{\frac{1}{2}}x^4 + 6yx^3 - 4y^{\frac{3}{2}}xx + y^2x + 10x^{\frac{1}{3}} - 6y^{\frac{1}{2}} = 0$$

Quæritur y in ſerie eo citius convergente quo major eſt x.

Pono

Digitized by Google

$y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} + \&c.$

In Æquatione pro y ſubſtituo x^n (3.), & indices ſunt

$5,\ \frac{1}{2}n+4,\ n+3,\ \frac{3}{2}n+2,\ 2n+1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2}n.$

Per propoſitionem primam quæro n, & detego $n = 2$, indices mutantur in hos (12.).

$5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ \frac{1}{3},\ 1.$

Et eſt 5, Index, quem linea tetigit, omnium maximus; quia agitur de x majori (9.).

Ex 5. ſubtraho Indices reliquos, & habeo ſeriem differentiarum (13.),

$4\frac{2}{3},\ 4.$

Harum maximus communis Diviſor eſt $\frac{2}{3}$. (14.).

Per hunc divido 4, differentiarum minimam (15.) & Quotiens eſt 6.

Quæro A (16.), & detego ipſum habere quatuor valores æquales.

Quæro numerum minimum, qui exacte poſſit dividi per 6 & 4 (17.), eſt hic 12.

Per hunc divido 4 differentiarum minimam, & Quotiens eſt $\frac{1}{3}$, & $r = -\frac{1}{3}$. (18.).

Forma Seriei ergo eſt

$$y = Ax^2 + Bx^{\frac{5}{3}} + Cx^{\frac{4}{3}} + Dx + Ex^{\frac{2}{3}} + Fx^{\frac{1}{3}} + G + Hx^{-\frac{1}{3}}\ \&c.$$

EXEMPLUM 2.

$$-\frac{y^9}{b^5} + xy^3 - 2x^2y^2 + x^3y + \frac{x^{14}}{b^{10}} = 0.$$

Quæritur y in ſerie eo citius convergente quo minor eſt x.

Series adſumta eſt

$y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} + \&c.$

In Æquatione pro y ſcribo x^n, (3.), & indices quantitatis x ſunt,

$9n$, $3n+1$, $2n+2$, $n+3$, 14.

In parallelogrammo detegimus per prop. 1. $n = 1$. & indices ſunt (12),

9, 4, 4, 4, 14.

Series differentiarum (13) eſt

5, 10.

Maximus harum communis Diviſor 5. (14.).

Per quem diviſâ differentiâ minimâ Quotiens eſt 1. (15.).

Habet A duos valores Æquales (16.); & numerus minimus, qui exacte per numerum hunc & per Quotientem 1. exacte poteſt dividi, eſt 2. (17.).

Divido ergo 5. per 2. & $r = 2\frac{1}{2}$. (18.).

Forma ſeriei nunc eſt

$y = Ax + Bx^{3\frac{1}{2}} + Cx^6 + Dx^{8\frac{1}{2}} + \&c.$

Ipſa

Ipſa series eſt.

$$y = x + \frac{1}{a^{\frac{5}{2}}}x^{3\frac{1}{2}} + \frac{4}{a^5}x^6 + \left.\begin{matrix} +\frac{22}{a^{\frac{15}{2}}} \\ -\frac{a^{\frac{5}{2}}}{2b^{10}} \end{matrix}\right\} x^{8\frac{1}{2}} \left.\begin{matrix} +\frac{140}{a^{10}} \\ -\frac{13}{2b^{15}} \end{matrix}\right\} x^{11} + \&c.$$

FINIS.

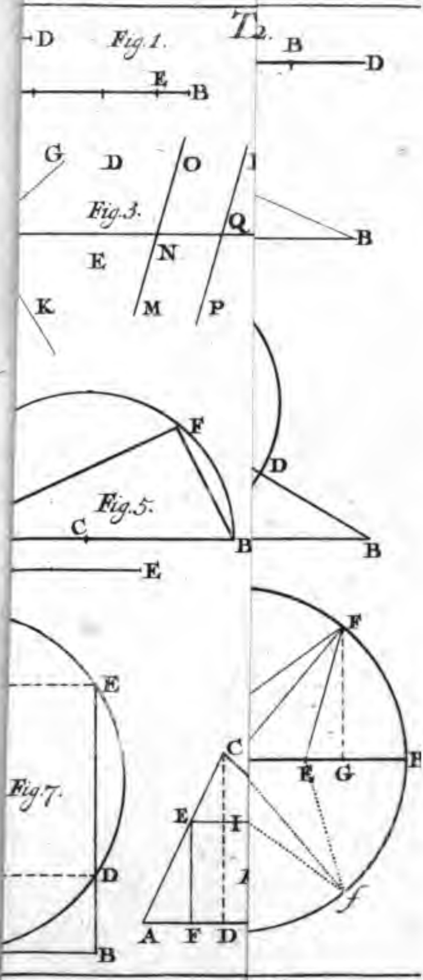
Digitized by Google

CORRIGENDA
antequam liber ipſe legatur.

Pag.	*Lin.*	*dele.*	*leg*
8.	*poſt* 19.		ut in n. monuim
14.	2.	(21.)	(22.)
48.	22.	in	inter
49.	2.	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
52.	22.	antecedens	conſeque
	23.	conſequens	anteceder
74.	19.	x	x (149.).
80.	15.	quando	quando in ce caſibu
81.	6.	quantitata affirmate	quantitate firmata
85.	5.	exprimitur	exprimunt
89.	8.	$\frac{egf-bbd}{gb-eb}$	$\frac{agf-ebd}{gb-eb}$
109.	4. *a fine*	duos	duas
	ult.	$-\sqrt{}9$	$-\sqrt{}-9$
119.	7.	variis	duobus
125.	15.	ſecundum	ſecundam
	16.	po-	poteſt
155.	*ult.*	bc	bd
203.	12.	diviſores	diviſores du rum *dinent* onum
209.	3.	quo	quibus
225.	3.	$2x\sqrt{y}$	$2x\sqrt{y}$
238.	12.	debent	debet
239.	14.	$\frac{2}{3}n$	$\frac{3}{2}n$
240.	13.	maximum	minimum
	15.	minimum	maximum

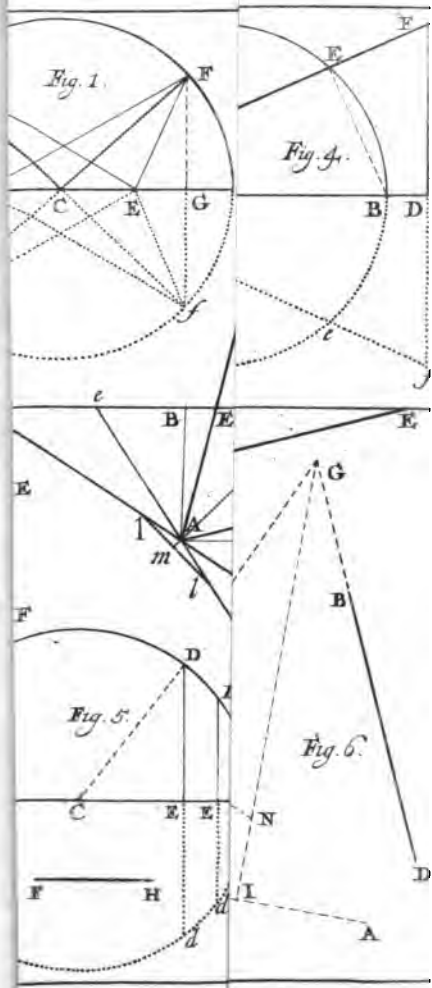
F I N I S.

Digitized by Google



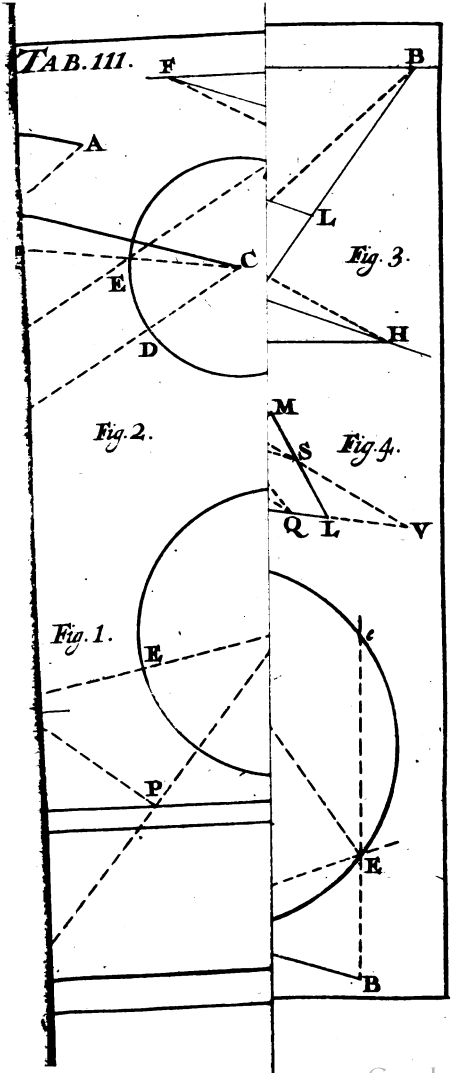
Digitized by Google

Digitized by Google



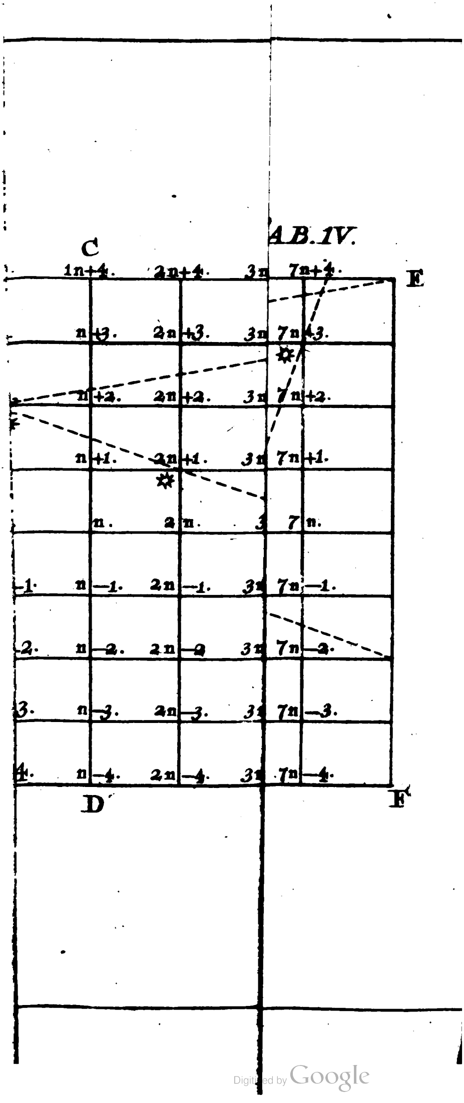
Digitized by Google

Digitized by Google



TAB. III.
F
B
A
L
C
Fig. 3.
E
H
D
M
Fig. 2.
S
Fig. 4.
Q
L
V
e
Fig. 1.
E
P
E
B

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google